LISTA DE EXERCÍCIOS
GRUPO PET - IFCE CAMPUS SOBRAL

TÓPICO: Ondas I

A Velocidade de uma Onda Progressiva

Problema 1 (Problema 9, pág 143, capítulo 16, Fundamentos de Física vol.2 - Resnick, 9.Ed.)
Uma onda senoidal que se propaga em uma corda é mostrada duas vezes na Fig. 16-32, antes e depois que o pico se desloque 6,0 cm no sentido positivo de um eixo x em 4,0 ms. A distância entre as marcas do eixo horizontal é 10 cm; $H = 6,0$ mm. Se a equação da onda é da forma $y(x,t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t)$, determine (a) y_m, (b) k, (c) ω e (d) o sinal que precede ω.

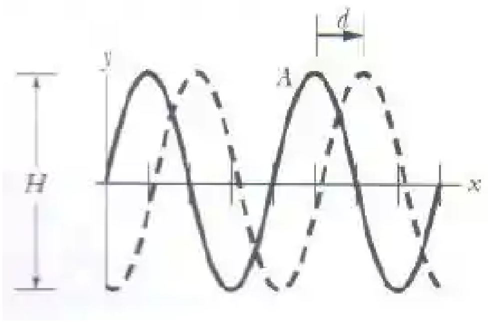

Figura 16-32

Resolução P1: Levando em conta as informações do enunciado, pondo-as nas unidades do SI, e sabendo que as equações necessárias são:

$$y_m = \frac{H}{2}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{\Delta t} = \frac{d}{\Delta t}.$$

Podemos substituir os valores, e encontrar os resultados de cada item.

Item (a):

$$y_m = \frac{H}{2} = \frac{6 \cdot 10^{-2}}{2} = 3 \cdot 10^{-3} m$$

Item (b):

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,4} = 16 \; rad/m$$

Item (c):

$$v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = v \cdot k = \frac{d}{\Delta t}k$$
$$\omega = \frac{0,06}{0,004}16 = 3 \cdot 10^{-3}m$$

Item (d): Como nesta situação a onda está se movendo para a direita, indetifica-se tendo o sinal negativo $(-)$.

Problema 2 (Problema 5, pág 143, capítulo 16, Fundamentos de Física vol.2 - Resnick, 9.Ed.)
Uma onda senoidal se propaga em uma corda. O tempo necessário para que um ponto da corda se desloque do deslocamento máximo até zero é 0,170 s. Qual é (a) o período e (b) a frequência da onda? (c) O comprimento da onda é 1,40 m; qual é a velocidade da onda?

Resolução P2: (a) Pela descrição da questão, a distância entre uma crista e a outra está dividida em quatro partes. Assim, o período está dividido em quatro partes iguais. Utilizando a relação:

$$T = 4t$$

– T é o período do fenômeno.

– t é o tempo de medição da questão.

- Substituindo:

$$T = 4 \cdot 0{,}170$$

$$\boxed{T = 0{,}68\,\mathrm{s}}$$

(b) Utilizemos nesta alternativa a relação:

$$f = \frac{1}{T}$$

– f é a frequência.

- Substituindo os dados:

$$f = \frac{1}{0{,}68}$$

$$\boxed{f = 1{,}47\,\mathrm{Hz}}$$

(c) A questão nos apresenta os seguintes dados para esta alternativa: $\lambda = 1{,}40$ m

Usando a relação:

$$v = f \cdot \lambda$$

– v é a velocidade de propagação da onda.
– λ é o comprimento de onda.

- Substituindo os valores:

$$v = 1{,}47 \cdot 1{,}40$$

$$\boxed{v = 2{,}058\,\mathrm{m/s}}$$

Velocidade da Onda em uma Corda Esticada

Problema 3 (Problema 21, pág 144, capítulo 16, Fundamentos de Física vol.2 - Resnick, 9.Ed.)
Um fio de 100 g é mantido sob uma tensão de 250 N com uma extremidade em $x = 0$ e a outra em $x = 10,0$ m. No instante $t = 0$ o pulso 1 começa a se propagar no fio a partir do ponto $x = 10,0$ m. No instante $t = 30,0$ ms o pulso 2 começa a se propagar no fio a partir do ponto $x = 0$. Em que ponto x os pulsos começam a se sobrepor?

Resolução P3: A velocidade v de uma onda em um fio é dada por:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \text{onde} \quad \mu = \frac{m}{L}$$

Calculando:

$$\mu = \frac{0{,}100}{10{,}0} = 0{,}010\ \mathrm{kg/m}$$

$$v = \sqrt{\frac{250}{0{,}010}} = \sqrt{25\,000} = 158,11 m/s$$

O Pulso 1 parte de $x = 10$ indo para a esquerda:

$$x_1(t) = 10 - vt$$

O Pulso 2 parte de $x = 0$ indo para a direita, com $t = 0{,}030$ s:

$$x_2(t) = v(t - 0{,}030)$$

Igualando as posições:

$$10 - vt = v(t - 0{,}030)$$

Substituindo $v = 158{,}11$:

$$10 - 158{,}11\,t = 158{,}11\,t - 4{,}7433$$

$$10 + 4{,}7433 = 158{,}11\,t + 158{,}11\,t = 316{,}22\,t$$

$$14{,}7433 = 316{,}22\,t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{14{,}7433}{316{,}22} = 0,0466\,s$$

Substituindo o valor de t em $x_1(t)$, para encontrar a posição de encontro:

$$x = 10 - 158{,}11 \cdot 0{,}0466 = 10 - 7{,}37 \Rightarrow \boxed{x = 2,63\,m}$$

Problema 4 (Problema 16, pág 144, capítulo 16, Fundamentos de Física vol.2 - Resnick, 9.Ed.)
A velocidade de uma onda transversal em uma corda é 170 m/s quando a tensão da corda é 120 N. Qual deve ser o valor da tensão para que a velocidade da onda aumente para 180 m/s?

Resolução P4: Levando em conta as informações apresentadas no enunciado e sabendo que a equação necessária para a solução é $v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$, podemos substituir os dados para encontrar a densidade da corda (μ) para então encontrar a nova tensão pedida, de forma que:

Substituindo os primeiros valores e encontrando μ:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \Rightarrow 170^2 = \frac{120}{\mu} \Rightarrow \mu = \frac{120}{28900}$$

$$\mu = 4,15 \cdot 10^{-3}\ Kg/m^3$$

Por fim, substituindo o valor encontrado para determinar o valor da tensão pedida:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \Rightarrow 180^2 = \frac{\tau}{4,15 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \tau = 4,15 \cdot 10^{-3} \cdot 32400$$

$$\tau = 134,46\ N$$

Energia e Potência de uma Onda Progressiva em uma Corda

Problema 5 (Problema 27, pág 144, capítulo 16, Fundamentos de Física vol.2 - Resnick, 9.Ed.)
Uma onda senoidal é produzida em uma corda com uma massa específica linear de 2,0 g/m. Enquanto a onda se propaga, a energia cinética dos elementos de massa ao longo

da corda varia. A Fig. 16-36a mostra a taxa dK/dt com a qual a energia cinética passa pelos elementos de massa da corda em certo instante em função da distância x ao longo da corda. A Fig. 16-36b é semelhante, exceto pelo fato de que mostra a taxa com a qual a energia cinética passa por um determinado elemento de massa (situado em certo ponto da corda) em função do tempo t. Nos dois casos, a escala do eixo vertical é definida por $R_s = 10$ W. Qual é a amplitude da onda?

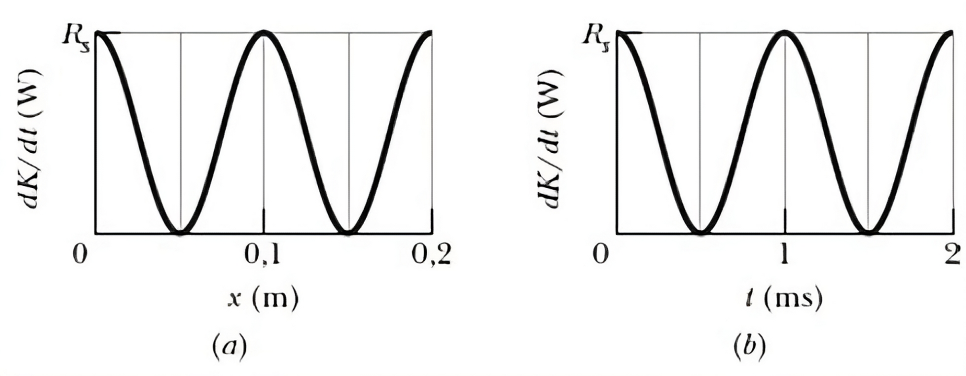

Figura 16-36

Resolução P5: Para resolver esta questão, utilizamos a expressão da taxa de varição da energia cinética de uma onda senoidal em uma corda. A partir da análise dos gráficos fornecidos, determinamos o comprimento de onda e a frequência da onda. Com esses dados, calculamos a velocidade de propagação e a frequência angular, que foram então aplicadas na mesma expressão, considerando o caso de variação máxima, para encontrar o valor da amplitude da onda.

Sabemos que a potência P (taxa de transmissão da energia cinética dK/dt) de uma onda progressiva em uma corda é descrita por:

$$P = \frac{dk}{dt} = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 A^2 \cos^2[kx - \omega t] \tag{1}$$

Onde μ é a massa específica da corda; v é a velocidade de propagação da onda; ω é a frequência angular da onda; A é a aplitude da onda e k é o número de onda.

De acorodo com as figuras do problema, no caso em que a potência é máxima, isto é, assume o valor de $R_s = 10$ W, o fator variável da equação (1) deve ser máximo, ou seja,

$$\cos^2[kx - \omega t] = 1 \tag{2}$$

Além disso, observando os gráficos e sabendo que a função da potência é do tipo $\cos^2$, que se repete a cada metade do comprimento de onda (λ) no espaço e metade do período no tempo (T), podemos concluir que $\lambda = 0,2$ m e período $T = 2$ ms resultando em uma frequência $f = 5,0 \cdot 10^2$ Hz. Com essas informações, podemos determinar os valores da velocidade de propagação da onda v e a da frequência angular ω através das suas definções, respectivamente:

$$v = \lambda f \tag{3}$$

$$\omega = 2\pi f \tag{4}$$

Assim, das considerações feitas nas equações (2), (3) e (4), podemos reescrever a equação (1) como:

$$R_s = \frac{1}{2}\mu(\lambda f)(2\pi f)^2 A^2 \tag{5}$$

Isolando a aplitude A, temos:

$$A = \sqrt{\frac{R_s}{2\mu\lambda\pi^2 f^3}} \tag{6}$$

Substituindo os valores conhcidos, sendo $\mu = 2,0 \cdot 10^{-3}$ kg/m,

$$A = \sqrt{\frac{10}{2(2,0 \cdot 10^{-3})(0,2)\pi^2(5,0 \cdot 10^2)^3}}$$

obtemos

$$A = 3,2 \cdot 10^{-3} \ m$$

Problema 6 (Problema 26, pág 144, capítulo 16, Fundamentos de Física vol.2 - Resnick, 9.Ed.)
Uma corda na qual ondas podem se propagar tem 2,70 m de comprimento e 260 g de massa. A tensão da corda é de 36,0 N. Qual deve ser a frequência de ondas progressivas com uma amplitude de 7,70 mm para que a potência média seja 85,0 W?

Resolução P6: Queremos calcular a frequência de ondas progressivas a partir de uma dada potência média que é transmitida através dessas ondas progressivas. Para isso, usamos a equação da potência de uma onda progressiva em uma corda:

$$P_{med} = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot v \cdot \omega^2 \cdot y_m^2$$

Sabemos que:

Amplitude ${y_m}^2 = 0,0077\, m$
Massa da corda $= 0,26\, kg$
Comprimento da corda $= 2,70 \ m$
Tensão na corda $\tau = 36,0 \ N$

Inicialmente, calculamos o valor de μ, massa específica linear da corda, dada por:

$$\mu = \frac{\text{massa}}{\text{comprimento}} = \frac{0,26 \ kg}{2,70 \ m} = 0,095 \ kg/m$$

Em seguida, calculamos a velocidade de onda nessa corda esticada dada pela equação:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{36,0 \ N}{0,095 \ kg/m}} = 19,46 \ m/s$$

Colocando em evidência ω, frequência angular, na equação da potência média e substituindo pelos resultados calculados, encontramos o seu valor:

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot P_{med}}{\mu \cdot v \cdot y_m^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 85}{0,095 \cdot 19,46 \cdot 0,0077^2}}$$

$$\omega = 1245,3\ rad/s$$

Assim, encontramos a frequência angular ω do sistema. Agora, através da relação $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$, calculamos a frequência de ondas progressivas f que é pedida pela questão. Logo:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{1245,3}{2 \cdot \pi}$$

$$\boxed{f \approx 198,2\ Hz}$$

Ondas Estacionárias

Problema 7 (Problema 43, pág 145, capítulo 16, Fundamentos de Física vol.2 - Resnick, 9.Ed.)
Qual é (a) a menor frequência,(b) a segunda menor frequência, e (c) a terceira menor frequência das ondas estacionárias em um fio com $10,0$ m de comprimento, $100\,\text{g}$ massa de e $250\,\text{N}$ tensão?

Resolução P7: Dados do problema:

- Comprimento: $L = 10\,\text{m}$
- Massa: $m = 100\,\text{g} = 0.100\,\text{kg}$
- Tensão: $T = 250\,\text{N}$

A densidade linear de massa é:

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0.100}{10} = 0.010\,\text{kg/m}$$

A velocidade da onda é:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{250}{0.010}} = \sqrt{25000} = 158.11\,\text{m/s}$$

Calculando as frequências:
(a) Primeira frequência ($n = 1$):

$$f_1 = \frac{1 \cdot 158.11}{2 \cdot 10} = \frac{158.11}{20} = \boxed{7.91\,\text{Hz}}$$

(b) Segunda menor frequência ($n = 2$):

$$f_2 = \frac{2 \cdot 158.11}{2 \cdot 10} = \frac{316.22}{20} = \boxed{15.81\,\text{Hz}}$$

(c) Terceira menor frequência ($n = 3$):

$$f_3 = \frac{3 \cdot 158.11}{2 \cdot 10} = \frac{474.33}{20} = \boxed{23.72\,\text{Hz}}$$

Problema 8 (Problema 47, pág 146, capítulo 16, Fundamentos de Física vol.2 - Resnick, 9.Ed.)
Uma das frequências harmônicas de uma certa corda sob tensão é 325 Hz. A frequência harmônica seguinte é 390 Hz. Qual é a sequência harmônica que se segue à de 195 Hz?

Resolução P8: Para uma onda estacionária, as frequências harmônicas são múltiplos inteiros da frequência fundamental. Portanto, a diferença entre frequências harmônicas consecutivas é constante:

$$\Delta f = f_1 - f_2$$

Onde:

- $f_1 = 390$ Hz
- $f_2 = 325$ Hz
- $f_3 = 195$ Hz

Operando:

$$\Delta f = 390 - 325 = 65 \text{ Hz}$$

$$\boxed{\Delta f = 65 \text{ Hz}}$$

Agora, para encontrar a próxima frequência após 195 Hz:

$$f_n = f_3 + \Delta f = 195 + 65 = 260 \text{ Hz}$$

$$\boxed{f_n = 260 \text{ Hz}}$$

Ondas Estacionárias e Ressonância

Problema 9 (Problema 51, pág 146, capítulo 16, Fundamentos de Física vol.2 - Resnick, 9.Ed.)
Duas ondas são geradas em uma corda com $3,0$ m de comprimento para produzir uma onda estacionária de três meios comprimentos de onda com uma amplitude de $1,0$ cm. A velocidade da onda é 100 m/s. Suponha que a equação de uma das ondas é da forma $y(x,t) = y_m \cdot \text{sen}\,(k \cdot x + \omega \cdot t)$. Na equação da outra onda, determine (a) y_m, (b) k, (c) ω e (d) o sinal que precede ω.

Resolução P9: Precisamos relacionar as características da equação da primeira onda para conseguirmos calcular as características da outra onda pedidas na questão. Temos que:

- comprimento da corda $l = 3,0\ m$
- amplitude da onda estacionária $A = 1,0$ cm
- velocidade da onda é $v = 100$ m/s
- equação de uma das ondas é $y(x,t) = y_m \cdot \text{sen}(k \cdot x + \omega \cdot t)$

(a) Como sabemos que a amplitude de cada onda progressiva é metade da amplitude da onda estacionária, calculamos a amplitude pedida:

$$y_m = \frac{A}{2} = \frac{1,0\ cm}{2} = \boxed{0,5\ cm}$$

(b) Para calcularmos o número de onda k, usamos a equação:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$$

onde λ é o comprimento de onda. Para uma onda estacionária com n meios comprimentos de onda, o comprimento da corda é:

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

Assim, podemos calcular o comprimento de onda isolando λ. A onda estacionária em questão tem três meios comprimentos. Logo:

$$\lambda = \frac{2 \cdot L}{n} = \frac{2 \cdot 3,0\ m}{3} = 2,0 \text{ m}$$

Com o comprimento da onda λ, podemos calcular o número de onda k:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot \pi}{2} = \boxed{\pi\ rad/m}$$

(c) usamos a equação $\omega = k \cdot v$ para calcularmos o valor da frequência angular ω.

$$\omega = \pi \text{ rad}/\cancel{\text{m}} \cdot 100\ \cancel{\text{m}}/\text{s} = \boxed{100 \cdot \pi \text{ rad/s}}$$

(d) Sabemos que a equação de uma onda progressiva que se move na direção $-x$ é $y(x,t) = y_m \cdot \text{sen}(k \cdot x + \omega \cdot t)$ e a equação de uma onda progressiva que se move na direção $+x$ é $y(x,t) = y_m \cdot \text{sen}(k \cdot x - \omega \cdot t)$. Como a primeira onda tem a forma $y(x,t) = y_m \cdot \text{sen}(k \cdot x + \omega \cdot t)$, ela indica uma propagação na direção $-x$. Para formar uma onda estacionária, a segunda onda deve se propagar na direção oposta, ou seja, na direção $+x$. Portanto, o sinal que precede ω na equação da segunda onda é $\boxed{\text{negativo}}$.

Problema 10 (Problema 59, pág 147, capítulo 16, Fundamentos de Física vol.2 - Resnick, 9.Ed.)

Na Fig. 16-43, um fio de alumínio, de comprimento $L_1 = 60{,}0$ cm, seção reta $1,00 \cdot 10^{-2}$ cm^2 e massa específica 2,60 g/cm^3, está soldado a um fio de aço, de massa específica 7,80 g/cm^3 e mesma seção reta. O fio composto, tensionado por um bloco de massa m = 10,0 kg, está disposto de tal forma que a distância L_2 entre o ponto de solda e a polia é 86,6 cm. Ondas transversais são excitadas no fio por uma fonte externa de frequência variável; um nó está situado na polia. (a) Determine a menor frequência que produz uma onda estacionária tendo o ponto de solda como um dos nós. (b) Quantos nós são observados para essa frequência?

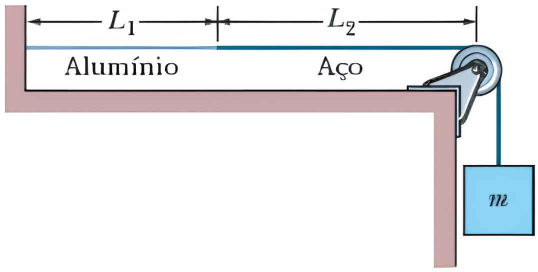

Figura 16-43

Resolução P10: De acordo com a configuração do sistema descrito na questão, temos uma fonte externa que produz ondas transversais com frquências variáveis em um fio tensionado e composto de dois materiais: alumínio e aço. Sendo assim, a frequência da onda produzida é a mesma para os dois materiais, entretanto a velocidade de propoagação da onda difere dependendo do meio material. A partir dessa análise inical, podemos responder os ítens (a) e (b).

(a) Para encontarmos a menor frequência capaz de produzir uma onda estacionária devemos determinar o menor número harmônico n associado a onda. Assim, em razão do fio ser formado por dois materiais distintos, podemos decompor o fio em dois: fio 1, feito de alumínio, e fio 2, feito de aço. Desse modo, sendo a separação do fio exatamente no ponto de solda, temos a garantia que esse ponto é um nó, pois, pode ser considerado uma extremiade fixa. Dessa forma, a frequência de resonância f em cada fio, pode ser descrita como:

$$f_1 = n_1 \frac{v_1}{2L_1} \tag{1}$$

$$f_2 = n_2 \frac{v_2}{2L_2} \tag{2}$$

Onde v é a velocidade da onda no fio e L é o comprimento do fio. Como a frequência é a mesma em ambos os fios, podemos escrever:

$$n_1 \frac{v_1}{2L_1} = n_2 \frac{v_2}{2L_2}$$

daí,

$$n_1\frac{v_1}{L_1}=n_2\frac{v_2}{L_2} \tag{3}$$

Assim,

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{L_1}{L_2}\frac{v_2}{v_1} \tag{4}$$

Com a equação obtida, podemos relacionar os números harmônicos em cada trecho do fio com os comprimentos e velocidades de propagação. Para prosseguir, sabemos que a velocidade v é dada por:

$$v=\sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \tag{5}$$

Onde τ é a tensão ao longo do fio e μ é a massa específica linear do fio. Assim, devido a presença do bloco de massa m e da polia, considerada como ideal, formando um sistema em equilíbrio, a tensão é igual ao peso do bloco. Ou seja:

$$\tau=mg \tag{6}$$

O enunciado do problema não nos fornece a a massa específica linear de cada material, porém, são dados a massa específica volumétrica ρ e a seção transversal A dos fios. A partir dessas informações, conseguimos obter μ. Vejamos:

$$\rho=\frac{M}{V} \tag{7}$$

A equação (7) é a definição de massa específica volumétrica de um material homogêneo, onde, no caso da questão, M e V são, respectivamentes, a massa e volume do fio. O volume V pode ser escrito como

$$V=AL \tag{8}$$

Assim, das equações (7) e (8), podemos escrever:

$$\rho=\frac{M}{AL} \tag{9}$$

daí,

$$A\rho=\frac{M}{L}$$

Onde por definição

$$\mu=\frac{M}{L}$$

Dessa forma, escrevemos:

$$\mu=A\rho \tag{10}$$

Unindo as equações (5), (6) e (10), temos uma nova expressão para a velocidade v:

$$v = \sqrt{\frac{mg}{A\rho}} \tag{11}$$

Substituindo a equação (11) na equação (4), temos:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{L_1}{L_2} \frac{\sqrt{\frac{mg}{A\rho_2}}}{\sqrt{\frac{mg}{A\rho_1}}} \tag{12}$$

Simplificando,

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{L_1}{L_2} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \tag{13}$$

Substituindo os valores conhecidos, temos:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{60,0}{86,6} \sqrt{\frac{2,60}{7,80}}$$

resultando em

$$\frac{n_1}{n_2} = 0,40$$

Escrevendo o resultado acima em forma de uma fração irredutível, obtemos

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{2}{5}$$

Logo, os menores números harmônicos correspondente à frequência de ressonância são $n_1 = 2$ para o fio de alumínio e $n_2 = 5$ para o fio de aço. Dessa forma, aplicando o valor de n_1 na equação da frequência (1) e utilizando a expressão da velocidade, equação (11), encontramos

$$f_1 = \frac{2}{2L_1} \sqrt{\frac{mg}{A\rho}}$$

Substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$f_1 = 324 \ Hz$$

Portanto, a menor frequência capaz de produzir uma onda estacionária no fio composto tendo o ponto de solda como um dos nós é $f = 324$ Hz.

(b) Sabendo que a onda produzida tem um número harmônico $n_1 = 2$ no fio 1 e $n_2 = 5$ no fio 2,sendo assim, temos que no fio 1 são produzidos 3 nós e no fio 2 são produzidos 6 nós, porém, como o ponto de solda é um nó comum aos dois fios, a quantidade de nós observados é 8 nós.