

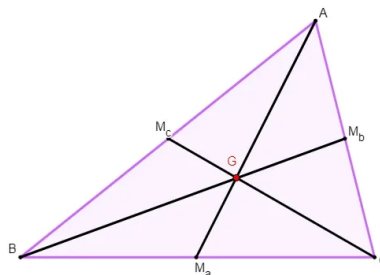
LISTA DE EXERCÍCIOS GRUPO PET - IFCE CAMPUS SOBRAL

TÓPICO: Geometria Analítica

Problema 1 (Problema 29, pág 18, capítulo I, Fundamentos de Matemática Elementar vol.7 - Iezzi, 6.Ed.)

O baricentro de um triângulo é $G(5, 1)$ e dois de seus vértices são $A(9, -3)$ e $B(1, 2)$. Determine o terceiro vértice.

Resolução P1: Antes de começarmos a resolver a questão vamos recapitular o que é o baricentro. O baricentro G de determinado triângulo nada mais é que o ponto no qual as medianas do mesmo se intersectam, como mostrado na figura a seguir.



O baricentro G do triângulo é dado por:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Inserindo as coordenadas dos vértices que conhecemos, obtemos:

$$G\left(\frac{9 + 1 + x_C}{3}, \frac{-3 + 2 + y_C}{3}\right) \Rightarrow G\left(\frac{10 + x_C}{3}, \frac{-1 + y_C}{3}\right)$$

A questão nos disse que $G(5, 1)$, assim podemos igualar tanto as abcissas como as ordenadas de G . Logo:

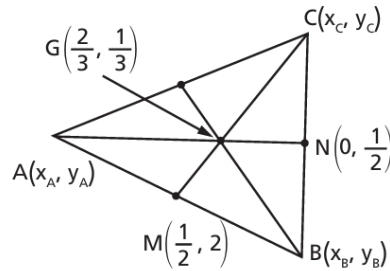
$$\begin{aligned} \frac{10 + x_C}{3} = 5 &\Rightarrow 10 + x_C = 15 \Rightarrow x_C = 15 - 10 \Rightarrow x_C = 5 \\ \frac{-1 + y_C}{3} = 1 &\Rightarrow -1 + y_C = 3 \Rightarrow y_C = 3 + 1 \Rightarrow y_C = 4 \end{aligned}$$

Concluimos então, que o vértice que faltava é $C(5, 4)$.

Problema 2 (Problema 30, pág 18, capítulo I, Fundamentos de Matemática Elementar vol.7 - Iezzi, 6.Ed.)

O baricentro de um triângulo é $G\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, o ponto médio do lado BC é $N\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e o ponto médio do lado AB é $M\left(\frac{1}{2}, 2\right)$. Determine os vértices A, B, C.

Resolução P2: A configuração do nosso problema é a seguinte:



O baricentro é $G\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Além disso, o baricentro divide o segmento $\overline{AN}$ em outros dois $\overline{AG}$ e $\overline{GN}$ tal que:

$$\overline{AG} = 2 \overline{GN} \Rightarrow \frac{\overline{AG}}{\overline{GN}} = 2$$

Assim:

$$\frac{x_A - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - 0} = 2 \Rightarrow x_A = 2 \quad \text{e} \quad \frac{y_A - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow y_A = 0$$

Logo $A(2, 0)$

M é o ponto médio de AB, então:

$$\frac{1}{2} = \frac{2 + x_B}{2} \Rightarrow x_B = -1 \quad \text{e} \quad 2 = \frac{0 + y_B}{2} \Rightarrow y_B = 4$$

Logo $B(-1, 4)$

N é o ponto médio de BC, então:

$$0 = \frac{-1 + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} = \frac{4 + y_C}{2} \Rightarrow y_C = -3$$

Logo $C(1, -3)$.

Problema 3 (Problema 34, pág 22, Fundamentos da Matemática Elementar Vol.6 - Iezzi, 6.Ed.)

Verificar se os pontos $A(1, 3)$, $B(2, 5)$ e $C(49, 100)$ são colineares.

Resolução P3: Para isso, calculamos o determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 49 & 100 & 1 \end{vmatrix} = 1(5 \cdot 1 - 100 \cdot 1) - 3(2 \cdot 1 - 49 \cdot 1) + 1(2 \cdot 100 - 49 \cdot 5) \\ = 1(-95) - 3(-47) + 1(200 - 245) = -95 + 141 - 45 = 1$$

Como o determinante é diferente de zero, os pontos "não são colineares".

Problema 4 (Problema 35, pág 22, Fundamentos da Matemática Elementar Vol.6 - Iezzi, 6.Ed.)

Determinar y para que os pontos $A(3, 5)$, $B(-3, 8)$ e $C(4, y)$ sejam colineares.

Resolução P4:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -3 & 8 & 1 \\ 4 & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$3(8 \cdot 1 - y \cdot 1) - 5(-3 \cdot 1 - 4 \cdot 1) + 1(-3 \cdot y - 8 \cdot 4) = 0$$

$$3(8 - y) - 5(-7) + (-3y - 32) = 0$$

$$24 - 3y + 35 - 3y - 32 = 0 \Rightarrow 27 - 6y = 0 \Rightarrow y = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

Logo, $y = \frac{9}{2}$ para que os pontos sejam colineares..

Problema 5 (Problema 201, pág 98, capítulo 4, Fundamentos da Matemática Elementar Vol.7 - Iezzi, 6.Ed.)

Calcule a área do triângulo cujos vértices são $A(a + 1, a + 2)$, $B(a, a - 1)$ e $C(a + 2, a)$.

Resolução P5:

Sabemos que a fórmula da área de um triângulo a partir das coordenadas de seus vértices é:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} \right|$$

Identificando os dados dos vértices:

$$A = (a + 1, a + 2)$$

$$B = (a, a - 1)$$

$$C = (a + 2, a)$$

Montando a matriz:

$$\begin{pmatrix} a + 1 & a + 2 & 1 \\ a & a - 1 & 1 \\ a + 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Para facilitar o cálculo visualmente, aplicamos a Regra de Sarrus, repetindo as duas primeiras linhas:

$$\begin{pmatrix} a + 1 & a + 2 & 1 & a + 1 & a + 2 & 1 \\ a & a - 1 & 1 & a & a - 1 & 1 \\ a + 2 & a & 1 & a + 2 & a & 1 \\ a + 1 & a + 2 & 1 & a + 1 & a + 2 & 1 \\ a & a - 1 & 1 & a & a - 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos os elementos das diagonais principais:

$$\begin{aligned} & (a + 1)(a - 1)(1) + (a)(a)(1) + (a + 2)(a + 2)(1) \\ &= a^2 - 1 + a^2 + a^2 + 4a + 4 \\ &= 3a^2 + 4a + 3 \end{aligned}$$

Multiplicamos os elementos das diagonais secundárias:

$$\begin{aligned} & (1)(a + 2)(a) + (1)(a - 1)(a + 2) + (1)(a + 1)(a) \\ &= a^2 + 2a + a^2 + a - 2 + a^2 + a \\ &= 3a^2 + 4a - 2 \end{aligned}$$

Determinante:

$$\det = (3a^2 + 4a + 3) - (3a^2 + 4a - 2) = 5$$

Área do triângulo:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 5 = \boxed{2,5}$$

Problema 6 (Problema 204, pág 98, capítulo 4, Fundamentos da Matemática Elementar Vol.7 - Iezzi, 6.Ed.)

Calcule a área do triângulo determinado pelas retas $y=x$, $x=4$ e $x+y-2=0$.

Resolução P6:

Resolução passo a passo

- $y = x$ reta r
- $x = 4$ reta s
- $x + y - 2 = 0$ reta t

Primeiro vamos achar os vértices do triângulo:

Para o ponto **A** a interseção é r e s

$$Y = x$$

$$x = 4$$

A(4,4)

Para o ponto **B** a interseção é r e t

$$Y = x$$

$$x + y - 2 = 0$$

$$x + x - 2 = 0$$

$$2x - 2 = 0$$

$$2x = 2$$

$$x = \frac{2}{2}$$

$$x = 1$$

B(0,1)

Para o ponto **C** a interseção é s e t

$$x = 4$$

$$x + y - 2 = 0$$

$$4 + y - 2 = 0$$

$$2 + y = 0$$

$$y = -2$$

C(4,-2)

Os vértices são A(4,4), B(0,1) e C(4,-2)

Sabemos que a fórmula da área de um triângulo a partir das coordenadas de seus vértices é:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} \right|$$

Substituindo vértices na matriz:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Um artifício no meio da física:

$$\begin{pmatrix} 4 & & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 4 & & 1 \end{pmatrix}$$

Organizamos os elementos da matriz visualmente para facilitar os produtos:

determinante = (Soma das diagonais principais) - (Soma das diagonais secundárias)

- Multiplicamos os elementos das diagonais principais:

$$4.4.1 + 4.1.1 + 0.(-2).1$$

$$= 16 + 4 + 0 = 20$$

- Multiplicamos os elementos das diagonais secundário:

$$1.4.0 + 1.1.4 + 1.(-2).4$$

$$= 0 + 4 - 8 = -4$$

- Agora subtraímos os produtos das diagonais :

$$\det = (20) - (-4)$$

$$= 24$$

calcular a área:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 24 = \boxed{12}$$

Problema 7 (Problema 01, seção 6.7, pág 201, capítulo 6, Geometria analítica - Steinbruch e Winterle, Volume único)

Mostrar que o ponto $P_1(2, 2, 3)$ é equidistante dos pontos $P_2(1, 4, -2)$ e $P_3(3, 7, 5)$.

Resolução P7: Para mostrar que o ponto P_1 é equidistante de P_2 e P_3 , precisamos calcular a distância entre P_1 e P_2 e a distância entre P_1 e P_3 . Se as duas distâncias forem iguais, o ponto P_1 é equidistante dos outros dois.

A fórmula da distância d entre dois pontos $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$ no espaço tridimensional é dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Vamos calcular a distância $d(P_1, P_2)$ usando os pontos $P_1(2, 2, 3)$ e $P_2(1, 4, -2)$:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(1-2)^2 + (4-2)^2 + (-2-3)^2}$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (-5)^2}$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{1 + 4 + 25}$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{30}$$

Agora, vamos calcular a distância $d(P_1, P_3)$ usando os pontos $P_1(2, 2, 3)$ e $P_3(3, 7, 5)$:

$$d(P_1, P_3) = \sqrt{(3-2)^2 + (7-2)^2 + (5-3)^2}$$

$$d(P_1, P_3) = \sqrt{(1)^2 + (5)^2 + (2)^2}$$

$$d(P_1, P_3) = \sqrt{1 + 25 + 4}$$

$$d(P_1, P_3) = \sqrt{30}$$

Como $d(P_1, P_2) = \sqrt{30}$ e $d(P_1, P_3) = \sqrt{30}$, as distâncias são iguais. Portanto, fica mostrado que o ponto P_1 é equidistante dos pontos P_2 e P_3 .

Problema 8 (Problema 35, seção 4.15, pág 135, capítulo 4, Geometria analítica - Steinbruch e Winterle, Volume único)

Seja o triângulo de vértices $A(1, 0, -2)$, $B(2, -1, -6)$ e $C(-4, 5, 2)$. Estabelecer as equações paramétricas da reta suporte da mediana do triângulo ABC relativa ao lado BC.

Resolução P8: A mediana relativa ao lado BC é o segmento de reta que une o vértice A ao ponto médio do lado BC. A reta suporte é a reta que contém essa mediana. Para encontrar suas equações paramétricas, precisamos de um ponto (usaremos o vértice A) e um vetor diretor (o vetor que vai de A até o ponto médio de BC).

Vamos chamar o ponto médio de BC de M. As coordenadas de M são a média das coordenadas de B e C.

$$M = \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}, \frac{z_B + z_C}{2} \right)$$

Substituindo os valores de $B(2, -1, -6)$ e $C(-4, 5, 2)$:

$$M = \left(\frac{2 + (-4)}{2}, \frac{-1 + 5}{2}, \frac{-6 + 2}{2} \right)$$

$$M = \left(\frac{-2}{2}, \frac{4}{2}, \frac{-4}{2} \right)$$

$$M = (-1, 2, -2)$$

O vetor diretor $\vec{v}$ da reta suporte da mediana é o vetor $\vec{AM}$, que é obtido pela diferença das coordenadas de M e A.

$$\vec{v} = \vec{AM} = M - A = (-1 - 1, 2 - 0, -2 - (-2))$$

$$\vec{v} = (-2, 2, 0)$$

As equações paramétricas de uma reta que passa pelo ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ com vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$ são dadas por:

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

Usando o ponto $A(1, 0, -2)$ e o vetor diretor $\vec{v} = (-2, 2, 0)$:

$$\begin{cases} x = 1 + (-2)t \\ y = 0 + 2t \\ z = -2 + 0t \end{cases}$$

As equações paramétricas da reta suporte da mediana relativa ao lado BC são:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \\ z = -2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Problema 9 (Problema 2, pág 201, capítulo 6, seção 6.7, Geometric Analítica - Steinbruch e Winterle, Volume Único)

Determinar, no eixo das ordenadas, um ponto equidistante de $A(1,1,4)$ e $B(-6,6,4)$

Resolução P9: Um ponto qualquer no eixo y tem coordenadas da forma:

$$P(0, y, 0)$$

onde y é a incógnita que precisamos determinar.

A distância entre dois pontos no espaço tridimensional é dada por:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- Distância de P a A :

$$d_{PA} = \sqrt{(0 - 1)^2 + (y - 1)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{1 + (y - 1)^2 + 16} = \sqrt{(y - 1)^2 + 17}$$

- Distância de P a B :

$$d_{PB} = \sqrt{(0 - (-6))^2 + (y - 6)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{36 + (y - 6)^2 + 16} = \sqrt{(y - 6)^2 + 52}$$

Para que P seja equidistante de A e B , temos:

$$d_{PA} = d_{PB}$$

Substituindo as expressões:

$$\sqrt{(y-1)^2 + 17} = \sqrt{(y-6)^2 + 52}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$(y-1)^2 + 17 = (y-6)^2 + 52$$

Expandindo os quadrados:

$$y^2 - 2y + 1 + 17 = y^2 - 12y + 36 + 52$$

Simplificando:

$$y^2 - 2y + 18 = y^2 - 12y + 88$$

Cancelando y^2 :

$$-2y + 18 = -12y + 88$$

Isolando y :

$$10y = 70 \implies y = 7$$

Substituindo $y = 7$ na expressão de P :

$$P(0, 7, 0)$$

Resposta Final O ponto no eixo y equidistante de $A(1, 1, 4)$ e $B(-6, 6, 4)$ é:

$$\boxed{(0, 7, 0)}$$

Problema 10 (Problema 7, pág 36, capítulo 2, seção 2.8, Geometric Analítica - Steinbruch e Winterle, Volume Único)

Dados os pontos $A(2, -3, 1)$ e $B(4, 5, -2)$, determinar o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$.

Resolução P10:

Para encontrar o ponto P que satisfaz a condição $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$, podemos interpretar geometricamente que:

- $\overrightarrow{AP} = P - A$
- $\overrightarrow{PB} = B - P$

Igualando os vetores conforme a condição do problema:

$$P - A = B - P$$

Resolvendo para P :

$$P + P = A + B$$

$$2P = A + B$$

$$P = \frac{A + B}{2}$$

Calculando as coordenadas:

$$P = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{-3+5}{2}, \frac{1+(-2)}{2} \right) = \left(3, 1, -\frac{1}{2} \right)$$

O ponto P que satisfaz $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$ é:

$$\boxed{P \left(3, 1, -\frac{1}{2} \right)}$$