Lista de Exercícios

Tópico I: **Geometria Analítica**

Problema 1 (Steinbruch e Winterle, Geometria Analítica Volume Único, Capítulo 1, Seção 1.8, p. 14, Prob. 03)

Sabendo que o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de $60°$, determinar o ângulo formado pelos vetores:

a) $\vec{u}$ e $-\vec{v}$

b) $-\vec{u}$ e $\vec{v}$

c) $-\vec{u}$ e $-\vec{v}$

d) $2\vec{u}$ e $3\vec{v}$

Solução:

O ângulo θ entre dois vetores não nulos $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é dado por:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Dado que o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $60°$, temos:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos(60°) = \frac{1}{2}|\vec{u}||\vec{v}|$$

a) **Ângulo entre $\vec{u}$ e $-\vec{v}$:**

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot(-\vec{v})}{|\vec{u}||-\vec{v}|} = \frac{-(\vec{u}\cdot\vec{v})}{|\vec{u}||\vec{v}|} = -\frac{1}{2}$$

Portanto, $\alpha = \arccos(-\frac{1}{2}) = 120°$.

b) **Ângulo entre $-\vec{u}$ e $\vec{v}$:**

$$\cos\beta = \frac{(-\vec{u})\cdot\vec{v}}{|-\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{-(\vec{u}\cdot\vec{v})}{|\vec{u}||\vec{v}|} = -\frac{1}{2}$$

Logo, $\beta = 120°$.

c) **Ângulo entre $-\vec{u}$ e $-\vec{v}$:**

$$\cos\gamma = \frac{(-\vec{u})\cdot(-\vec{v})}{|-\vec{u}||-\vec{v}|} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{1}{2}$$

Assim, $\gamma = 60°$.

d) **Ângulo entre $2\vec{u}$ e $3\vec{v}$:**

$$\cos\delta = \frac{(2\vec{u})\cdot(3\vec{v})}{|2\vec{u}||3\vec{v}|} = \frac{6(\vec{u}\cdot\vec{v})}{6|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{1}{2}$$

Portanto, $\delta = 60°$.

Problema 2 (Steinbruch e Winterle, Volume Único, Capítulo 2, Seção 2.8 Pag.37 Prob 07)

Determinar os valores de a e b de modo que os vetores $\vec{u} = (4, 1, -3)$ e $\vec{v} = (6, a, b)$ sejam paralelos.

Resolução:

Dois vetores são paralelos se um for múltiplo escalar do outro. Assim, existe um escalar λ tal que:

$$\vec{v} = \lambda\vec{u}$$

$$(6, a, b) = \lambda(4, 1, -3)$$

Comparando as componentes:

$$\begin{cases} 6 = 4\lambda \\ a = \lambda \\ b = -3\lambda \end{cases}$$

Da primeira equação:

$$\lambda = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Substituindo:

$$a = \frac{3}{2}, \quad b = -3\cdot\frac{3}{2} = -\frac{9}{2}$$

Portanto temos:

$$\boxed{a = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad b = -\frac{9}{2}}$$

Problema 3 (Steinbruch e Winterle, Volume Único, Capítulo 2, Seção 2.8 p.37, Prob. 10)

Encontre os números a_1 e a_2 tais que $\vec{w} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 = (1, -2, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, 0, -4)$ e $\vec{w} = (-4, -4, 14)$.

Solução: Queremos que $a_1(1, -2, 1) + a_2(2, 0, -4) = (-4, -4, 14)$.
Isso nos dá: $(a_1 + 2a_2,\ -2a_1,\ a_1 - 4a_2) = (-4,\ -4,\ 14)$. Comparando componente a componente, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = -4 \\ -2a_1 = -4 \\ a_1 - 4a_2 = 14 \end{cases}$$

Resolvendo:

Da segunda equação:

$$-2a_1 = -4 \Rightarrow a_1 = 2$$

Substituindo na primeira:

$$2 + 2a_2 = -4 \Rightarrow 2a_2 = -6 \Rightarrow a_2 = -3$$

Verificando na terceira equação:

$$a_1 - 4a_2 = 2 - 4(-3) = 2 + 12 = 14$$

Portanto temos:

$$\boxed{a_1 = 2 \quad \text{e} \quad a_2 = -3}$$

Problema 4 (Steinbruch e Winterle, Volume Único, Capítulo 2, Seção 2.8 p. 37, Prob. 5)

Dados os vetores $\vec{u} = (2, -4)$, $\vec{v} = (-5, 1)$ e $\vec{w} = (-12, 6)$, determinar os escalares k_1 e k_2 tais que $\vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$.

Resolução

Escrevemos a equação vetorial como um sistema de equações escalares:

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = k_1(2, -4) + k_2(-5, 1) = (-12, 6)$$

Isso nos dá o sistema:

$$\begin{cases} 2k_1 - 5k_2 = -12 \\ -4k_1 + k_2 = 6 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

- Da segunda equação:

$$k_2 = 6 + 4k_1$$

- Substituindo na primeira:

$$2k_1 - 5(6 + 4k_1) = -122k_1 - 30 - 20k_1 = -12 - 18k_1 = 18 \Rightarrow k_1 = -1$$

- Substituindo $k_1 = -1$ na expressão de k_2:

$$k_2 = 6 + 4(-1) = 6 - 4 = 2$$

Portanto, $k_1 = -1$ e $k_2 = 2$.

Problema 5 (Steinbruch e Winterle, Volume Único, Capítulo 2, Seção 2.8 p. 37, Prob. 07)

Dados os pontos $A(2, -3, 1)$ e $B(4, 5, -2)$, determinar o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$

Solução:

Sabendo que: se $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ são dois pontos quaisquer no espaço, então:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Tomando $P(x, y, z)$, $\overrightarrow{AP} = P - A = (x, y, z) - (2, -3, 1) = (x - 2, y + 3, z - 1)$
e $\overrightarrow{PB} = B - P = (4, 5, -2) - (x, y, z) = (4 - x, 5 - y, -2 - z)$.

Como $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$,

$$(x - 2, y + 3, z - 1) = (4 - x, 5 - y, -2 - z),$$

$$x - 2 = 4 - x \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

$$y + 3 = 5 - y \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1$$

$$z - 1 = -2 - z \Rightarrow 2z = -1 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$$

Portanto, $P(3, 1, -\frac{1}{2})$.

Problema 6 (Steinbruch e Winterle, Volume Único, ?^{a} Ed. Capítulo 2, Seção 2.8 p.37, Prob. 12)

Verificar se os pontos são colineares:

a) $A(-1, -5, 0), B(2, 1, 3)$ e $C(-2, -7, -1)$

b) $A(2, 1, -1), B(3, -1, 0)$ e $C(1, 0, 4)$

Solução:

Sabendo que: se dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são colineares (ou paralelos), existe um número k tal que $\vec{u} = k\vec{v}$, ou seja,

$$(x_1, y_1, z_1) = k(x_2, y_2, z_2) = (kx_2, ky_2, kz_2)$$

assim, pela igualdade de vetores:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k.$$

Os pontos serão colineares se os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$ forem colineares.

a)

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-2, -7, -1) - (-1, -5, 0) = (-1, -2, -1)$$
$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 1, 3) - (-1, -5, 0) = (3, 6, 3).$$
$$\frac{-1}{3} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

Logo, os pontos A,B e C são colineares.

b)

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1, 0, 4) - (2, 1, -1) = (-1, -1, 5)$$
$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, -1, 0) - (2, 1, -1) = (1, -2, 1).$$
$$\frac{-1}{1} \neq \frac{-1}{-2} \neq \frac{5}{1}$$

Logo, os pontos A,B e C não são colineares.