Lista de Exercícios

Funções exponencias

Problema 1 (Stewart, J. Cálculo. Vol.1, 7^a Ed., p. 53, Prob. 1-4)

1-4. Utilize a Propriedade dos Exponentes para reescrever e simplificar a expressão.

1. a) $\frac{4^{-3}}{2^{-8}}$

   b) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

2. a) $8^{\frac{4}{3}}$

   b) $x\left(3x^2\right)^3$

3. a) $b^8(2b)^4$

   b) $\frac{\left(6y^3\right)^4}{2y^5}$

4. a) $\frac{\left[\left(x^{2n}\right)\times x^{3n-1}\right]}{x^{n+2}}$

   b) $\frac{\sqrt{a\sqrt{b}}}{(ab)^{\frac{1}{3}}}$

Resolução P1:

Tendo em vista as Propriedades dos Expoentes:

Se a e b forem números positivos e x e y, quaisquer números reais, então

1. $a^{x+y} = a^x a^y$
2. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$
4. $(ab)^x = a^x b^x$

Assim, resolvemos os itens:

1. a) $\frac{4^{-3}}{2^{-8}} = \frac{4^{-3}}{(2^2)^{-4}} = \frac{4^{-3}}{4^{-4}} = 4^{-3} \times 4^4 = 4^{-3+4} = 4$

   b) $\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{[(x \times x^3)]^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{x \times x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$

2. a) $8^{\frac{4}{3}} = 8 \times 8^{\frac{1}{3}} = 8 \times 2 = 16$

   b) $x\left(3x^2\right)^3 = x \times \left(3^3 \times \left(x^2\right)^3\right) = x \times (27x^6) = 27x^7$

3. a) $b^8(2b)^4 = b^8 \times (2^4 \times b^4) = b^8 \times (16 \times b^4) = 16b^{12}$

   b) $\frac{\left(6y^3\right)^4}{2y^5} = \frac{6^4 \times \left(y^{12}\right)}{2y^5} = \frac{1296 \times y^{12}}{2y^5} = \frac{1296}{2} \times y^{12} \times y^{-5} = 648y^{12-5} = 648y^7$

4. a) $\frac{\left[\left(x^{2n}\right) \times x^{3n-1}\right]}{x^{n+2}} = \frac{x^n\left(x^n \times x^{3n-1}\right)}{x^n \times x^2} = \frac{x^n \times x^{3n-1}}{x^2} = \frac{x^{3n+n} \times x^{-1}}{x^2} = \frac{x^{3n+n}}{x^2 \times x} = \frac{x^{4n}}{x^3} = x^{4n-3}$

   b) $\frac{\sqrt{a\sqrt{b}}}{(ab)^{\frac{1}{3}}} = \frac{\left(ab^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{(ab)^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{6}} \times b^{-\frac{1}{12}} = \frac{a^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{1}{12}}} = \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[12]{b}}.$

Problema 2 (Guidorizzi. Um Curso de Cálculo. Vol.1, 5^a Ed., p. 128, Prob. 6.1) Calcule:

1. a)
$$\lim_{x\to+\infty} 3^x \tag{1}$$
   b)
$$\lim_{x\to-\infty} 5^x \tag{2}$$
   c)
$$\lim_{x\to-\infty} e^x \tag{3}$$
   d)
$$\lim_{x\to+\infty} (0,13)^x \tag{4}$$
   e)
$$\lim_{x\to+\infty} [2^x - 3^x] \tag{5}$$
   f)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-2^x}{1-3^x} \tag{6}$$
   g)
$$\lim_{x\to+\infty} 2^{-x} \tag{7}$$
   h)
$$\lim_{x\to+\infty} [2^x + 2^{-x}] \tag{8}$$

i)

$$\lim_{x \to -\infty} 2^{-x} \tag{9}$$

j)

$$\lim_{x \to -\infty} [2^x + 2^{-x}] \tag{10}$$

Resolução P2:

1. a) vamos substituir, x por $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} 3^{+\infty} \tag{11}$$

e esse limite é igual a $+\infty$

b) vamos substituir, x por $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} 5^{-\infty} \tag{12}$$

e esse limite é igual a zero.

c) vamos substituir , x por $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{-\infty} \tag{13}$$

E assim concluímos que a solução desse limite é zero.

d) vamos substituir, x por $+\infty$ logo

$$\lim_{x \to +\infty} (0,13)^{+\infty} \tag{14}$$

Logo, a solução desse limite vai ser igual zero.

e) vamos substituir x por $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} [2^{+\infty} - 3^{+\infty}] \tag{15}$$

Logo, a solução desse limite vai ser igual a indeterminação e para obtermos um resultado vamos colocar o termo de maior grau em evidência, logo vai ficar:

$$\lim_{x \to +\infty} (3^x [\frac{2^x}{3^x} - 1]) \tag{16}$$

no entanto, fazendo a substituição, continua dando indeterminação, então vamos modificar mais um pouco essa função para não dar indeterminação novamente.

Logo,

$$\lim_{x \to +\infty} 3^x * \lim_{x \to +\infty} ([\frac{2}{3}]^x - 1) \tag{17}$$

logo substituindo x por $+\infty$, o limite vai dar -∞.

f) vamos substituir, x por $+\infty$, porém, dá uma indeterminação, vamos precisar usar a regra de l´Hopital que diz, basta derivar para eleminar a indeterminação. Derivando:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-lh(2)2^x}{-lh(3)3^x} \tag{18}$$

logo usando as propriedades do cálculo do limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-lh(2)}{-lh(3)} * \lim_{x\to+\infty} [\frac{2}{3}]^x \tag{19}$$

E assim podemos concluir que quando substituimos o x por $+\infty$ o limite vai ser zero.

g) vamos substituir x por $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} 2^{-(+\infty)} \tag{20}$$

Logo, a solução desse limite vai ser igual a zero.

h) ao substituir x por $+\infty$, vamos ter uma indeterminação. E para solucionar essa indeterminação, vamos usar uma das propriedades de limites.

$$\lim_{x\to+\infty} [2^x] + \lim_{x\to+\infty} [2^{-x}] \tag{21}$$

Logo, a solução desse limite vai ser igual $+\infty$.

i) vamos substituir x por -∞

$$\lim_{x\to-\infty} 2^{-(-\infty)} \tag{22}$$

Logo, a solução desse limite é -∞.

j) ao substituir x por - ∞, vamos ter uma indeterminação.

E para solucionar essa indeterminação,vamos usar uma das propriedades de limites.

$$\lim_{x\to-\infty} [2^x] + \lim_{x\to-\infty} [2^{-x}] \tag{23}$$

Logo, a solução desse limite vai ser igual $+\infty$.

Problema 3 (Fundamentos de Matemática Elementar. Vol.2, 9^a Ed., p. 90, Prob. 232)

232. Resolva a equação $2^{3x+2} \cdot 3^{3x-1} = 8$.

Resolução P3:

Para resolver a equação: $2^{3x+2} \cdot 3^{3x-1} = 8$, podemos começar igualando 8 a uma potência:

$8 = 2^3$. Ficando da seguinte forma: $2^{3x+2} \cdot 3^{3x-1} = 2^3$

Agora, podemos usar a propriedade das potências de mesma base para igualar os expoentes:

$$3x + 2 = 3$$

Isolando x obteremos:

$$\begin{aligned} 3x &= 3 - 2 \\ 3x &= 1 \\ x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Portanto, a solução da equação é. $x = \frac{1}{3}$.

Problema 4 (Iezzi, G. Fundamentos de Matemática Elementar. Vol.2, 10^a Ed., p.41, Prob. 74)

Determine os valores de x que satisfazem a equação $100 \cdot 10^x = \sqrt[x]{1000^5}$.

Resolução P4:

Para resolver o problema usaremos o método da redução a uma base comum. Esse método é usado quando ambos os membros da equação forem redutíveis a potências de mesma base. Utilizando as propriedades de potências, podemos reorganizar a equação, igualando as bases da seguinte forma:

$$10^2 \cdot 10^x = (10^3)^{\frac{5}{x}} \Longrightarrow 10^2 \cdot 10^x = 10^{\frac{15}{x}}$$

Como a função exponencial é injetora, ou seja, para valores diferentes de x, tem-se uma imagem também diferente, podemos concluir que potências iguais e de mesma base têm os expoentes iguais. Usando essa propriedade teremos:

$$10^2 \cdot 10^x = 10^{\frac{15}{x}} \Longrightarrow 2 + x = \frac{15}{x}$$

Reorganizando a equação:

$$2 \cdot x + x^2 = 15 \Longrightarrow x^2 + 2 \cdot x - 15 = 0$$

Calculando o valor de Δ:

$$\begin{aligned} \Delta &= 4 - 4 \cdot (1) \cdot (-15) \\ \Delta &= 64 \\ \sqrt{\Delta} &= 8 \end{aligned}$$

Encontrando as raízes da equação de 2º grau:

$$x = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

$$x_1 = 3 \text{ ou } x_2 = -5$$

Portanto, os valores de x que satisfazem a equação $100 \cdot 10^x = \sqrt[x]{1000^5}$, são:

$$S = \{3, -5\}$$

Problema 5 (Iezzi, G. Fundamentos de Matemática Elementar. Vol.2, 10^a Ed., p. 89, Prob. 226)

O crescimento de certa cultura de bactérias obedece à função

$$X(t) = Ce^{kt},$$

em que $X(t)$ é o número de bactérias no tempo $t \geq 0$; C e k são constantes positivas (e é a base do logaritmo neperiano). Verificando que o número inicial de bactérias $X(0)$ duplica em 4 horas, quantas delas se pode esperar no fim de 6 horas?

Resolução P5:

Primeiro, vamos usar a informação de que o número inicial de bactérias duplica em 4 horas para determinar os valores de C e k.

Sabemos que $X(4)$ deve ser igual a duas vezes o valor inicial $X(0)$, ou seja, $X(4) = 2X(0)$.

Substituindo na fórmula:

$$X(4) = Ce^{4k} = 2C$$

Agora, podemos cancelar o termo C em ambos os lados da equação:

$$e^{4k} = 2$$

Tomando o logaritmo natural (neperiano) em ambos os lados:

$$4k = \ln(2)$$

Agora, podemos encontrar o valor de k:

$$k = \frac{\ln(2)}{4}$$

Agora que conhecemos o valor de k, podemos usar a função $X(t)$ para encontrar o número de bactérias no final de 6 horas, ou seja, $X(6)$:

$$X(6) = Ce^{6k}$$

Substituindo o valor de k:

$$X(6) = Ce^{\frac{3\ln(2)}{2}}$$

$$X(6) = C(e^{\ln(2)^{3/2}})$$

Como $e^{\ln(2)} = 2$:

$$X(6) = C(2^{3/2})$$

A raiz quadrada de 2 elevada ao cubo é igual a $2^{3/2} = 2\sqrt{2}$:

$$X(6) = C(2\sqrt{2})$$

Portanto, no final de 6 horas, podemos esperar que o número de bactérias seja igual a C vezes $2\sqrt{2}$.

Funções logarítmicas

Problema 6 (Iezzi, G. Fundamentos de Matemática Elementar. Vol.2, 10^a Ed., p. 103, Prob. 282)

Resolva as esquações:

1. a) $\log(x^{\log x}) = 1$

b) $x^{\log x - 1} = 100$

c) $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$

Resolução P6:

Antes de mais nada é importante saber que, para $\log_a b = x$ existir, é necessário que $0 < a \neq 1$ e $b > 0$. Dessa maneira, as soluções das equações devem satisfazer essas condições.

Observação: Quando a base de um logaritmo é igual a 10, ela pode ser omitida. Por exemplo: $\log_{10} 5$ pode ser escrito como $\log 5$. Assim, quando a base for omitida na resolução abaixo, devemos ter em mente que se trata de um logaritmo de base 10.

1. a) Para este caso a condição de existência dos logaritmos é $\boxed{\text{x} > 0}(I)$.
   Assim: $\log(x^{\log x}) = 1$, usando $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$ temos que $\log(x^{\log x}) = \log x \cdot \log x$

   $\Rightarrow \log x \cdot \log x = 1$

   $\Rightarrow (\log x)^2 = 1$, aplicando a raiz quadrada dos dois lados da igualdade

   $\Rightarrow \sqrt{(\log x)^2} = \sqrt{1} \Rightarrow \log x = \pm 1$

   $$\boxed{\log x = 1}\text{ (II) ou }\boxed{\log x = -1}\text{ (III)}$$

   Sabemos que $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, aplicando isto em (II) e em (III), temos:

   - $\log x = 1 \Rightarrow 10^1 = x$

     $$\boxed{x = 10}$$

   - $\log x = -1 \Rightarrow 10^{-1} = x$, usando a propriedade de potências $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ temos que $10^{-1} = \dfrac{1}{10}$

     $$\boxed{x = \frac{1}{10}}$$

   Assim, concluimos que $x = 10$ ou $x = \dfrac{1}{10}$ satisfazem a condição de existência (I). Logo, temos como solução:

   $$S = \left\{\frac{1}{10}, 10\right\}$$

b) Neste caso a condição de existência dos logaritmos é $\boxed{0 < x \neq 1}$ (I).

Assim: $x^{\log x - 1} = 100$, aplicando logaritmo de base x dos dois lados da igualdade

$\Rightarrow \log_x(x^{\log x - 1}) = \log_x 100$, usando $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$ temos que $\log_x(x^{\log x - 1}) = (\log x - 1) \cdot \log_x x$

$\Rightarrow (\log x - 1) \cdot \log_x x = \log_x 100$, pela propriedade $\log_a a = 1$ temos que $\log_x x = 1$

$\Rightarrow (\log x - 1) \cdot 1 = \log_x 100$

$\Rightarrow \log x - 1 = \log_x 100$, utilizando $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ temos que $\log_x 100 = \dfrac{\log_{10} 100}{\log_{10} x} = \dfrac{\log 100}{\log x}$

$\Rightarrow \log x - 1 = \dfrac{\log 100}{\log x}$, como $\log 100 = \log 10^2$

$\Rightarrow \log x - 1 = \dfrac{\log 10^2}{\log x}$, usando a propriedade $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$ temos que $\log 10^2 = 2 \cdot \log 10$

$\Rightarrow \log x - 1 = \dfrac{2 \cdot \log 10}{\log x}$, utilizando a propriedade $\log_a a = 1$ temos que $\log 10 = 1$

$\Rightarrow \log x - 1 = \dfrac{2 \cdot 1}{\log x}$

$\Rightarrow \log x - 1 = \dfrac{2}{\log x}$, fazendo $\log x = t$, temos:

$\Rightarrow t - 1 = \dfrac{2}{t}$

$\Rightarrow (t - 1) \cdot t = 2$

$\Rightarrow t^2 - t = 2$, subtraindo 2 de cada lado da igualdade

$\Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$, que é uma equação do 2° grau

Para resolver esta equação vamos usar a fórmula $t = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$, mas antes vamos determinar os seus coeficientes que são: $a = 1, b = -1$ e $c = -2$.

Logo:

$$t = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$$
$$\Rightarrow t = \frac{1 \pm 3}{2}$$
$$\Rightarrow t = 2 \quad \text{ou} \quad t = -1$$

Como fizemos $\log x = t$ concluimos que:

$$\boxed{\log x = 2} \text{ (II)} \quad \text{ou} \quad \boxed{\log x = -1} \text{ (III)}$$

Sabemos que $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, aplicando isso em (II) e em (III), temos:

- $\log x = 2 \Rightarrow 10^2 = x$

$$\boxed{x = 100}$$

- $\log x = -1 \Rightarrow 10^{-1} = x$, usando a propriedade de potências $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ temos que $10^{-1} = \dfrac{1}{10} \Rightarrow \dfrac{1}{10} = x$

$$\boxed{x = \frac{1}{10}}$$

Como $x = 100$ ou $x = \dfrac{1}{10}$ satisfazem a condição (I) temos como solução:

$$S = \left\{\frac{1}{10}, 100\right\}$$

c) A condição de existência dos logaritmos é $\boxed{0 < x \neq 1}$ (I).

Assim: $\Rightarrow \sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$, vamos elevar os dois lados da igualdade ao quadrado

$\Rightarrow (\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}})^2 = 10^2$

$\Rightarrow x^{\log \sqrt{x}} = 100$, aplicando logaritmo de base x dos dois lados da igualdade

$\Rightarrow \log_x x^{\log \sqrt{x}} = \log_x 100$, pela propriedade $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$ temos que

$\Rightarrow \log_x x^{\log \sqrt{x}} = \log \sqrt{x} \cdot \log_x x$

$\Rightarrow \log \sqrt{x} \cdot \log_x x = \log_x 100$, como $\log_a a = 1$ temos que $\log_x x = 1$

$\Rightarrow \log\sqrt{x} \cdot 1 = \log_x 100$

$\Rightarrow \log\sqrt{x} = \log_x 100$, usando $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$ temos que $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x^1} = x^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \log x^{\frac{1}{2}} = \log_x 100$, pela propriedade $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$ temos que $\log x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \cdot \log x$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} \cdot \log x = \log_x 100$, utilizando $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ temos que $\log_x 100 = \dfrac{\log 100}{\log x}$

$\Rightarrow \dfrac{\log x}{2} = \dfrac{\log 100}{\log x}$, mas como $\log 100 = \log 10^2$

$\Rightarrow \dfrac{\log x}{2} = \dfrac{\log 10^2}{\log x}$, pela propriedade $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$ temos que $\log 10^2 = 2 \cdot \log 10$

$\Rightarrow \dfrac{\log x}{2} = \dfrac{2 \cdot \log 10}{\log x}$, usando $\log_a a = 1$ temos que $\log 10 = 1$

$\Rightarrow \dfrac{\log x}{2} = \dfrac{2 \cdot 1}{\log x}$

$\Rightarrow \log x \cdot \log x = 2 \cdot 2$

$\Rightarrow (\log x)^2 = 4$, aplicando a raiz quadrada dos dois lados da igualdade

$\Rightarrow \sqrt{(\log x)^2} = \sqrt{4}$

$\Rightarrow \log x = \pm 2$

Assim, temos que:

$$\boxed{\log x = 2} \text{ (II)} \quad \text{ou} \quad \boxed{\log x = -2} \text{ (III)}$$

Sabemos que $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, aplicando isso em (II) e em (III), temos:

- $\log x = 2 \Rightarrow 10^2 = x$

$$\boxed{x = 100}$$

- $\log x = -2 \Rightarrow 10^{-2} = x$, pela propriedade de potência $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ temos que $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} \Rightarrow \dfrac{1}{10^2} = x$

$$\boxed{x = \frac{1}{100}}$$

Como $x = 100$ ou $x = \dfrac{1}{100}$ satisfazem a condição de existência (I), temos como solução:

$$S = \left\{ \frac{1}{100}, 100 \right\}$$

Problema 7 (Stewart, J. Cálculo. Vol.1, 7^a Ed., p. 65, Prob. 40)

Expresse a quantidade dada como um único logaritmo.

$$\ln(a+b) + \ln(a-b) - 2\ln c$$

Resolução P7:

Quando um número é multiplicado por ln, usamos a propriedade:

$\ln(a^n){=}n\ln a$, isso significa que n estava como expoente, assim temos:

$\ln(a+b) + \ln(a-b) - 2\ln c = \ln(a+b) + \ln(a-b) - \ln c^2$

Quando temos dois logaritmos de mesma base sendo somados, usamos a propriedade:

$\log_a b.c = \log_a b + \log_a c$, assim temos:

$\ln(a+b) + \ln(a-b) - \ln c^2 = \ln(a+b).(a-b) - \ln c^2$

fazendo a distributiva de $\ln(a+b).(a-b)$, temos:

$\ln(a+b).(a-b) = \ln(a^2 - b^2)$, assim:

$\ln(a^2 - b^2) - \ln c^2$

Quando temos subtração entre logaritmos de mesma base usamos a propiedade:

$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$, portanto:

$$\boxed{\ln \tfrac{a^2-b^2}{c^2}}$$

Problema 8 (Guidorizzi. Um Curso de Cálculo. Vol.1, 5^a Ed., p. 132, Prob. 1)

Calcule:

1. $\log_{10} 100$
2. $\log_{\frac{1}{2}} 16$
3. $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2})$

4. $\log_9(\sqrt{3})$
5. $\log_{10} 1$
6. $\log_5(-5)$
7. $\log_a 1 \quad (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$
8. $\log_3 243$

Resolução P8:

Conhecendo o Teorema: Sejam $a > 0$, $a \neq 1$, e $\beta > 0$ dois reais quaisquer. Então existe um único γ real tal que $a^\gamma = \beta$. (página 128)

Portanto, denomina-se logaritmo de β na base a e indica-se por $\gamma = \log_a \beta$.

Assim, $\gamma = \log_a \beta \iff a^\gamma = \beta$, onde $\log_a \beta$ somente está definido para $\beta > 0$, $a > 0$, e $a \neq 1$. (página 129).

Logo, vamos calcular o logaritmo em cada um dos itens.

1. $\log_{10} 100$

   $\gamma = \log_{10} 100$

   $10^\gamma = 100$

   $\gamma = 2$

   Logo, o logaritmo de 100 na base 10 é 2.

2. $\log_{\frac{1}{2}} 16$

   $\gamma = \log_{\frac{1}{2}} 16$

   $\left(\frac{1}{2}\right)^\gamma = 16$

   $\gamma = -4$

   Logo, o logaritmo de 16 na base $\frac{1}{2}$ é -4.

3. $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2})$

   $\gamma = \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2})$

$\left(\frac{1}{2}\right)^\gamma = \sqrt{2}$

$\gamma = -\frac{1}{2}$

Logo, o logaritmo de $\sqrt{2}$ na base $\frac{1}{2}$ é $-\frac{1}{2}$.

4. $\log_9(\sqrt{3})$

   $\gamma = \log_9(\sqrt{3})$

   $9^\gamma = \sqrt{3}$

   $\gamma = \frac{1}{4}$

   Logo, o logaritmo de $\sqrt{3}$ na base 9 é $\frac{1}{4}$.

5. $\log_{10} 1$

   $\gamma = \log_{10} 1$

   $10^\gamma = 1$

   $\gamma = 0$

   Logo, o logaritmo de 1 na base 10 é 0.

6. $\log_5(-5)$

   $\gamma = \log_5(-5)$

   $5^\gamma = -5$

   Não existe γ que satisfaça. Ou seja, não existe o logaritmo de -5 na base 5.

7. $\log_a 1 \quad (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$

   $\gamma = \log_a 1$

   $a^\gamma = 1$

   $\gamma = 0$

   Logo, o logaritmo de 1 na base a é 0.

8. $\log_3 243$

   $\gamma = \log_3 243$

   $3^\gamma = 243$

   $\gamma = 5$

   Logo, o logaritmo de 243 na base 3 é 5.

Problema 9 (Iezzi, G. Fundamentos de Matemática Elementar. Vol.2, 10^a Ed., p. 103, Prob. 287)

Resolva equação $log_2(x-2) = log_2(x^2 - x + 6) + log_{\frac{1}{2}}(2x+1)$.

Resolução P9:

Estabelecendo inicialmente a condição de existência dos logaritmos,temos:

$$\left.\begin{array}{l} x-2>0 \Rightarrow x>2 \\ x^2-x+6>0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ 2x+1>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x>2$$

Aplicando as propriedades e transformando os logaritmos na base 2, temos:

$log_2(x-2) = log_2(x^2 - x + 6) + log_{2^{-1}}(2x+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow log_2(x-2) = log_2(x^2 - x + 6) - log_{2^{-1}}(2x+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow log_2(x-2) = log_2 \frac{x^2-x+6}{2x+1} \Rightarrow x - 2 = \frac{x^2-x+6}{2x+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = x^2 - x + 6 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$

Analisando as raízes que satisfazem a equação temos:

$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Para o conjunto solução, $x = -2$ não convém, pois $x < 2$, logo: $S = 4$.

Problema 10 (Iezzi, G. Fundamentos de Matemática Elementar. Vol.2, 10^a Ed., p. 86, Prob. 208)

Sefa f a função que a cada quadrado perfeito associa seu logaritmo na base 2. Se $f(x^2) = 2$, determine o valor de x.

Resolução P10:

A função f é definida por:

$$f(x^2) = \log_2(x^2)$$

Se $f(x^2) = 2$, então:

$$\log_2(x^2) = 2$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm\sqrt{4}$$
$$\boxed{x = \pm 2}$$