Lista de Exercícios

Definição de função

Problema 1 (James Stewart. Cálculo. Vol.I, 7^a Ed., p. 20, Prob. 38)
Considere a função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Determine o domínio, a imagem e esboce o gráfico dessa função.

Resolução P1 DOMÍNIO: Para determinar o domínio da função, devemos encontrar quais valores de x tornam a expressão dentro da raiz quadrada não negativa. Neste caso, a expressão $4 - x^2$ deve ser maior ou igual a zero. Resolvendo a desigualdade:

$$4 - x^2 \geq 0 \Longrightarrow x^2 \leq 4 \Longrightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

Portanto, o domínio da função é $[-2; 2]$.

IMAGEM: Para determinar a imagem da função $f(x)$, pegamos os valores que a função pode assumir.

Temos que o domínio da função é $-2 \leq x \leq 2$.

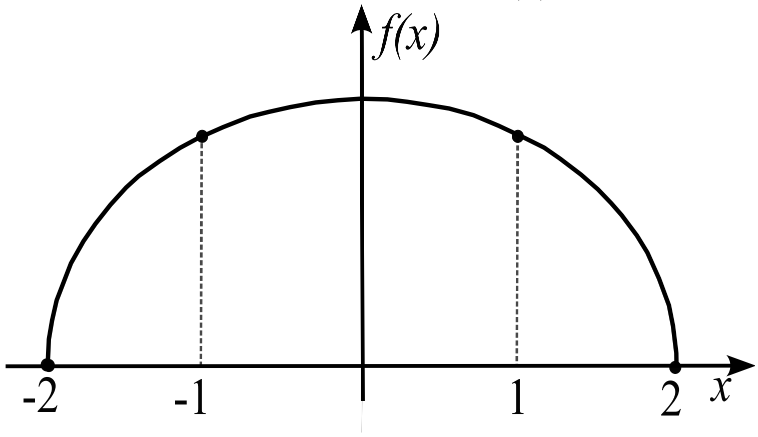
Agora, para determinar a imagem, vamos considerar que a função $f(x)$ é sempre não negativa. Ou seja, a imagem será o conjunto de todos os valores não negativos que a função pode assumir.

Isso implica que a imagem da função $f(x)$ é o intervalo $[0, 2]$, onde 0 é o valor mínimo que a função pode assumir e 2 é o valor máximo quando $x = 0$.

GRÁFICO: Para esboçar o gráfico da função, começamos marcando os pontos no plano cartesiano. Selecionamos alguns valores para x dentro do domínio $[-2; 2]$ e calculamos os valores correspondentes de y usando a função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.
Por exemplo:

- Para $x = -2$, temos $f(-2) = \sqrt{4 - (-2)^2} = \sqrt{4 - 4} = 0$.
- Para $x = -1$, temos $f(-1) = \sqrt{4 - (-1)^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$.
- Para $x = 0$, temos $f(0) = \sqrt{4 - 0} = 2$.
- Para $x = 1$, temos $f(1) = \sqrt{4 - 1^2} = \sqrt{3}$.
- Para $x = 2$, temos $f(2) = \sqrt{4 - 2^2} = \sqrt{4 - 4} = 0$.

Figura 1: Gráfico de $f(x)$.



Marcando esses pontos no plano cartesiano, podemos traçar uma curva suave que passa por esses pontos. A curva começa em $(2;0)$, desce $(0;2)$ até então sobe até $(-2;0)$. A curva representa o gráfico da função $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ no intervalo $[-2;2]$.

Problema 2 (James Stewart. Cálculo. Vol.I, 7ªEd, p. 32, Prob.15)
Biólogos notaram que a taxa de cricridos de uma certa espécie de grilo está relacionada com a temperatura de uma maneira que aparenta ser quase linear. Um grilo cricrila 112 vezes por minuto a 20 °C e 180 vezes por minuto a 29°C.
(a) Encontre uma equação linear que modele a temperatura T como uma função do número de cricridos por minuto N.
(b)Qual é a inclinação do gráfico? O que ela representa?
(c) Se os grilos estiverem cricrilando 150 vezes por minuto, estime a temperatura.

Resolução P2 (a) A relação entre a temperatura e o número de cricridos é linear, então podemos representar essa relação através da equação geral da reta:

$$T = aN + b.$$

No enunciado da questão, T é a temperatura e N o número de cricridos, então temos:

$$\begin{cases} 20 = 112a + b \\ 29 = 180a + b \end{cases}$$

Subtraindo as equações:

$$9 = 68a \Longrightarrow a = 0,132.$$

Encontrando o valor de b:

$$29 = 180a + b \Longrightarrow 29 = 180 \cdot 0,132 + b \Longrightarrow 29 = 23,76 + b \Longrightarrow b = 5,24.$$

Então a função será:

$$T = 0,132N + 5,24.$$

(b) A inclinação do gráfico é 0,132 e representa a taxa de variação do número de cricridos por grau de temperatura.

(c) Considerando o número de cricridos como $N = 150$, temos:

$$T = 150 \cdot 0,132 + 5,24 \Longrightarrow T = 25,04\ C.$$

Problema 3 (James Stewart. Cálculo. Vol.I, 7ªEd, p. 20, Prob.42)
Encontre o domínio e esboce o gráfico da função $H(t) = \frac{4-t^2}{2-t}$.

Resolução P3 Devemos observar que há uma restrição para o denominador da fração, uma vez que esse deve ser diferente de zero. Assim:

$$2 - t \neq 0 \Longrightarrow 2 \neq t.$$

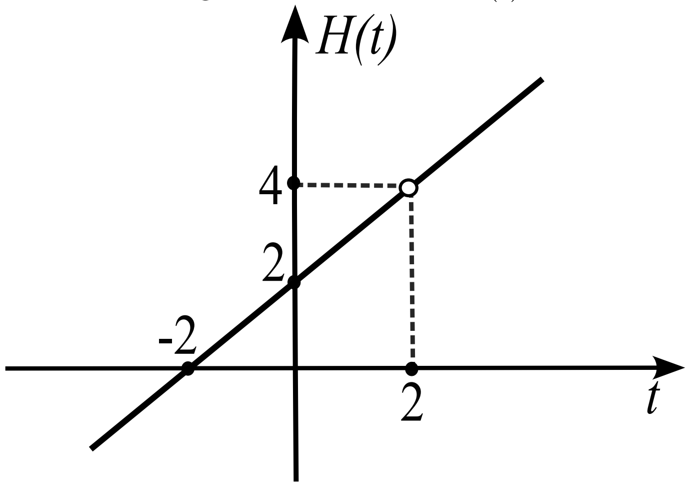
Então, o domínio da função são todos os números reais excluindo o 2, ou seja, $D = \{t \in \mathbb{R} \mid t \neq 2\}$.
Para esboçar o gráfico, podemos simplificar a expressão da função observando que podemos fatorar o numerador, isto é,

$$H(t) = \frac{4-t^2}{2-t} = \frac{2^2-t^2}{2-t} = \frac{(2-t)(2+t)}{2-t} = \frac{\cancel{(2-t)}(2+t)}{\cancel{2-t}} \Longrightarrow$$

$$H(t) = 2 + t,\ \ t \neq 2.$$

Achamos uma função do primeiro grau. Quando $t = 0$, $H(0) = 2$; e quando $H(t) = 2 + t = 0$, $t = -2$. Assim, temos dois pontos e podemos esboçar a reta, lembrando que no ponto $(2, 4)$ há uma descontinuidade.

Figura 2: Gráfico de $H(t)$



Problema 4 (James Stewart. Cálculo. Vol.I, 7ªEd, p. 65, Prob.19)
A fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, onde $F \geq -459,67$, expressa a temperatura C em graus Celsius como função da temperatura F em graus Fahrenheit. Encontre uma fórmula para a função inversa e interprete-a. Qual o domínio da função inversa?

Resolução P4 Vamos primeiro encontrar a inversa da função $C = \frac{5}{9}(F-32)$.

Sendo $f(x) = y$ uma função, chamamos de inversa de f a função $f^{-1}(y) = x$. Em outras palavras, dizemos que f transforma x em y, então f^{-1} transforma y de volta em x.

Como C é uma função de F, encontrar a inversa é obter F em função de C. Assim, isolando C:

$$C = \frac{5}{9}(F-32) \Longrightarrow \frac{9}{5}C = \frac{\cancel{5}}{\cancel{9}}(F-32)\frac{\cancel{9}}{\cancel{5}} \Longrightarrow F - 32 = \frac{9}{5}C \Longrightarrow$$

$$F = \frac{9}{5}C + 32.$$

A função $F = \frac{9}{5}C + 32$ é a inversa de $C = \frac{5}{9}(F-32)$.

Essa inversa nos permite, dada uma temperatura em Fahrenheit, encontrar seu valor correspondente em Celsius.

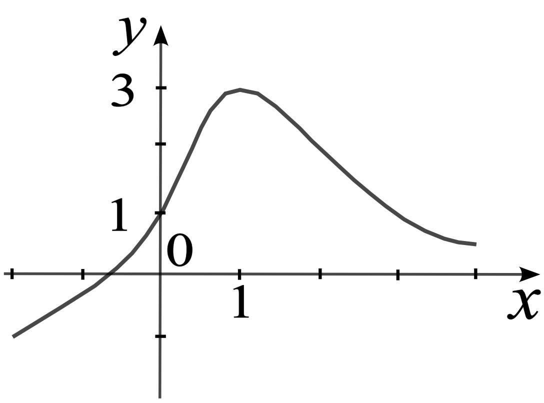
Podemos encontrar o domínio da inversa a partir do domínio da função original. Assim, sendo o domínio de C dado por $F \geq -459,67$, temos:

$$F = \frac{9}{5}C + 32 \geq -459,67 \Longrightarrow \frac{9}{5}C + 32 \geq -459,67 \Longrightarrow \frac{9}{5}C \geq -459,67 - 32 \Longrightarrow$$

$$\frac{9}{5}C \geq -491,67 \Longrightarrow C \geq -273,15.$$

Portanto, o novo domínio é $C \geq -273,15$.

Problema 5 (James Stewart. Cálculo. Vol.I, 7ªEd, p. 19, Prob.03)
O gráfico de uma função f é dado:

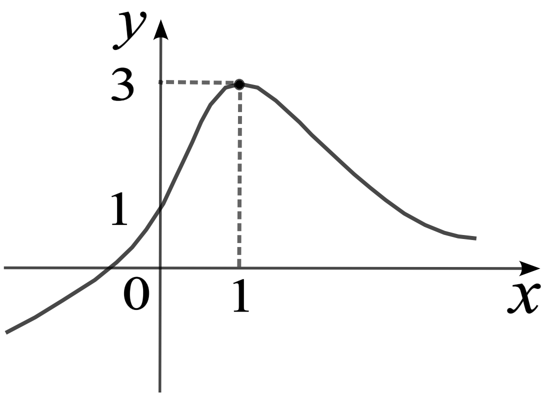


(a) Diga o valor de $f(1)$.
(b) Estime o valor de $f(-1)$.
(c) Para quais valores de x é $f(x) = 1$?
(d) Estime os valores de x tais que $f(x) = 0$.
(e) Diga qual é o domínio e a imagem de f.

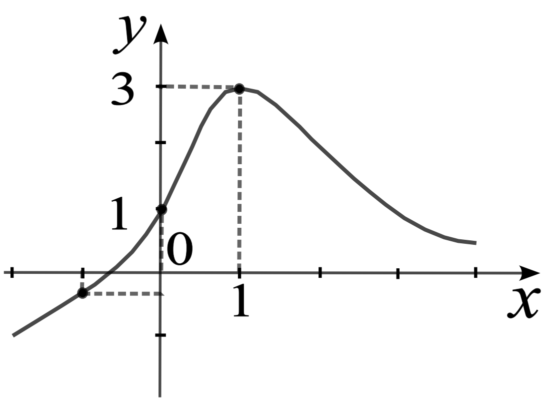
(f) Em qual intervalo f é crescente?

Resolução P5

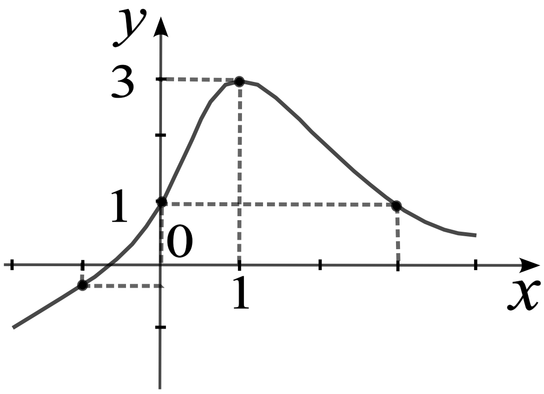
(a) Identifique o valor de 1 no eixo x, depois suba até o ponto do gráfico que possui a coordenada $x = 1$, como mostra a figura ao lado. O correspondente a coordenada y quando $x = 1$, que no caso é 3 é o valor da função. Logo, $f(1) = 3$.



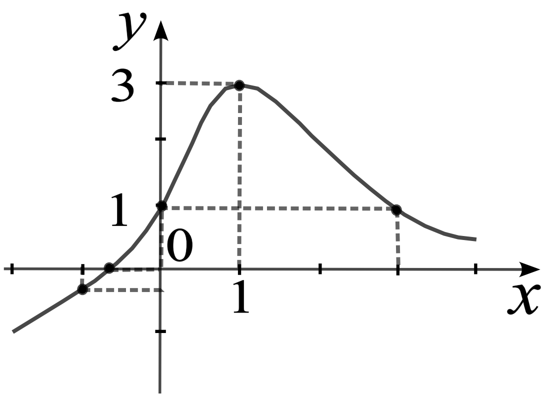
(b) De modo análogo ao item anterior, encontre o valor de -1 no eixo x, em seguida desça até o ponto do gráfico no qual possui a coordenada $x = -1$, porém neste caso não é possível afirmamos o valor exato do correspondente a coordenada y, mas podemos estimar que seja -0,2, como é mostrado na figura ao lado. Logo, $f(-1) = -0,2$.



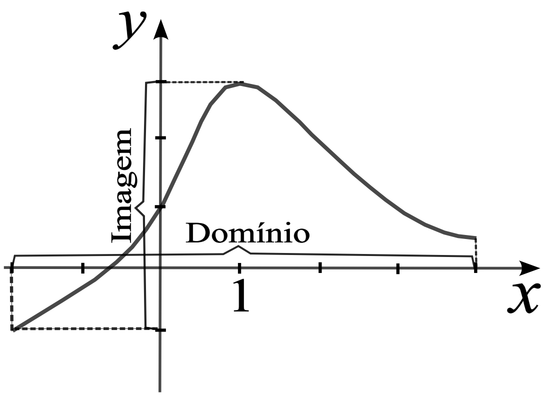
(c) $f(x) = 1$ é a mesma coisa que $y = 1$. Assim, devemos localizar o 1 no eixo y e ir para a esquerda e para direita para encontrarmos os pontos pertencentes ao gráfico e que possuem $y = 1$. As coordenadas x desses pontos serão justamente os valores de x que estamos procurando. Logo, $x = 0$ e $x = 3$.



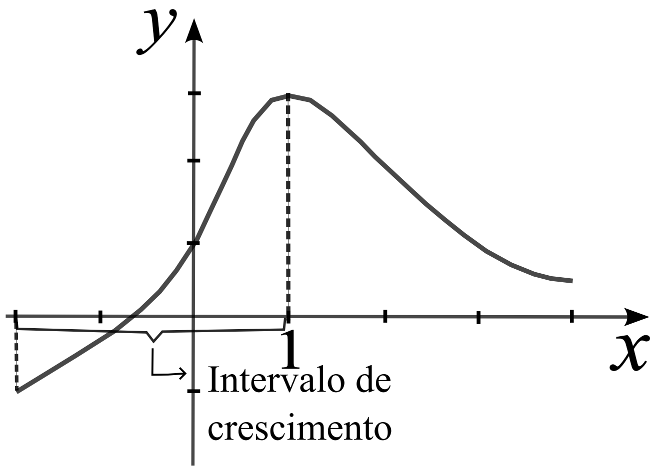
(d) $f(x) = 0$ equivale a $y = 0$. Dessa forma, de modo análogo ao item anterior, devemos ir para a esquerda e para a direita para encontrarmos os pontos do gráfico que possuem coordenada $y = 0$. Porém, neste caso não é possível atribuir um valor preciso para a coordenada x do ponto que encontramos, mas podemos estimar que seu valor seja aproximadamente $x = -0,8$.



(e) O domínio de f é composto pelos valores que x pode assumir de modo que o gráfico de f exista, e também pode ser entendido como a projeção ortogonal do gráfico sobre o eixo x. Logo, seu domínio é $-2 \leq x \leq 4$, ou [-2, 4]. Já a imagem de f é composta pelos valores de y para quais o gráfico de f existe, e também pode ser entendida como a projeção do gráfico sobre o eixo y. Assim, a imagem é $-1 \leq y \leq 3$, ou [-1, 3].



(f) Uma função é crescente em um intervalo I quando $f(x_1) < f(x_2)$ onde $x_1 < x_2$, ou seja, conforme x aumenta y também aumenta no mesmo intervalo I. Então, ao analisarmos o gráfico de f percebemos que a medida que x aumenta de -2 para 1, y também aumenta de -1 para 3. Dessa forma, f é crescente no intervalo [-2, 1].



TÓPICO 2: TRANSFORMAÇÕES DE FUNÇÕES

Problema 6 (James Stewart. Cálculo. Vol.I, 7ªEd, p. 40, Prob.02)
Explique como obter, a partir do gráfico de $y = f(x)$, os gráficos a seguir:
(a) $y = f(x) + 8$.
(b) $y = f(x + 8)$.
(c) $y = 8f(x)$.
(d) $y = f(8x)$.
(e) $y = -f(x) - 1$.
(f) $y = 8f(\frac{1}{8}x)$.

Resolução P6 (a) Quando $y = f(x) + 8$: a função é deslocada 8 unidades para cima, paralelo ao gráfico original.

(b) Quando $y = f(x + 8)$ todos os pontos do gráfico serão deslocado 8 unidades para esquerda, porque todos os valores de x serão substituídos por $x + 8$.

(c) Quando $y = 8f(x)$ todos os valores da função $f(X)$ é multiplicada por 8, resultando numa função ampliada em relação à função original.

(d) Quando $y = f(8x)$ é contraído horizontalmente por um fator de 8, resultando numa função reduzida em relação à função original.

(e) Quando $y = -f(x) - 1$ É refletida em relação ao eixo x e deslocada para baixo, ficando espelhado em relação a x.

(f) Quando $y = 8f(1/8x)$ a função esticada verticalmente o gráfico por 8 e comprime o gráfico original horizontalmente por 1/8.

Problema 7 (James Stewart. Cálculo. Vol.I, 7ªEd, p. 39/40, Prob.01)
Suponha que seja dado o gráfico de f. Escreva as equações para os gráficos obtidos a partir do gráfico de f da seguinte forma:
(a) Desloque 3 unidades para cima.

(b) Desloque 3 unidades para baixo.
(c) Desloque 3 unidades para a direita.
(d) Desloque 3 unidades para a esquerda.
(e) Reflita em torno do eixo x.
(f) Reflita em torno do eixo y.
(g) Expanda verticalmente por um fator de 3.
(h) Comprima verticalmente por um fator de 3.

Resolução P7 Sabemos que aplicando certas transformações aos gráficos de uma função obtemos o gráfico de funções relacionadas.

- Deslocamentos Verticais e Horizontais.
  Suponha $c > 0$ (um número positivo). Para obter o gráfico de:
  - $y = f(x) + c$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para cima;
  - $y = f(x)c$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para baixo;
  - $y = f(xc)$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para a direita;
  - $y = f(x + c)$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para a esquerda.
- Reflexões e Expansões Horizontais e Verticais.
  Suponha $c > 1$. Para obter o gráfico de:
  - $y = cf(x)$, expanda o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c;
  - $y = (1/c)f(x)$, comprima o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c;
  - $y = f(cx)$, comprima o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c;
  - $y = f(x/c)$, expanda o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c;
  - $y = -f(x)$, reflita o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo x;
  - $y = f(-x)$, reflita o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo y.

Para deslocar uma função para cima ou para baixo devemos mexer no eixo da função $f(x)$.

(a) Deslocar 3 unidades para cima, logo:

$$y = f(x) + 3.$$

(b) Deslocar 3 unidades para baixo, logo:

$$y = f(x) - 3.$$

(c) Deslocar 3 unidades para direita, logo:

$$y = f(x - 3).$$

(d) Deslocar 3 unidades para a esquerda, logo:

$$y = f(x + 3).$$

Vamos achar agora a função refletida em torno do eixo x. Assim, o eixo x divide a função $f(x)$ em negativa e positiva.

(e) Refletir em torno do eixo x, logo:

$$y = -f(x).$$

(f) Refletir em torno do eixo y, logo:

$$y = f(-x).$$

Podemos também comprimir ou expandir o gráfico e sabemos que verticalmente se trata do eixo $f(x)$.

(g) Expandir verticalmente por um fator de 3, ou seja, amplificar a função, multiplicar pelo fator 3, logo:

$$y = 3 \cdot f(x).$$

(h) Comprimir verticalmente por um fator de 3, ou seja, dividir pelo fator 3, logo:

$$y = \frac{1}{3}f(x).$$

Problema 8 (Howard Stephen. Cálculo. Vol.I, 10ªEd, p. 45, Prob.17)
Esboce o gráfico da equação por translação, reflexão, compressão e alongamento do gráfico de $y = |x|$ de maneira apropriada e, então, use um recurso gráfico para confirmar que seu esboço está correto.

Resolução P8

Nessa questão, nós vamos usar os princípios de translação, alongamento, compreensão e reflexão para esboçar o gráfico de $y = |x + 2| - 2$.

- Considerando inicialmente os princípios de **Translação**:

  - Se temos uma função $y = f(x)$, e somamos uma constante *positiva* c a $f(x)$, temos $y = f(x) + c$. O gráfico da função $y = f(x)$ é deslocado c unidades para cima.

  - Se temos uma função $y = f(x)$, e subtraímos uma constante *positiva* c de $f(x)$, temos $y = f(x) - c$. O gráfico da função $y = f(x)$ é deslocado c unidades para baixo.

  - Se temos uma função $y = f(x)$, e somamos uma constante *positiva* c a x, temos $y = f(x + c)$. O gráfico da função $y = f(x)$ é deslocado c unidades para a esquerda.

- Se temos uma função $y = f(x)$, e subtraímos uma constante *positiva* c de x, temos $y = f(x - c)$. O gráfico da função $y = f(x)$ é deslocado c unidades para a direita.

- Considerando os princípios de **Reflexão**:

  - O gráfico de $y = f(-x)$ é a reflexão do gráfico de $y = f(x)$ pelo eixo y porque o ponto (x, y) do gráfico de $f(x)$ é substituído por $(-x, y)$. Analogamente, o gráfico de $y = -f(x)$ é a reflexão do gráfico $y = f(x)$ pelo eixo x porque o ponto (x, y) do gráfico de $f(x)$ é substituído por $(x, -y)$ (a equação $y = -f(x)$ é equivalente a $-y = f(x)$).

- Considerando os princípios de **Alongamento e Compressão**:

  - Se temos uma função $y = f(x)$, e multiplicamos $f(x)$ por uma constante *positiva* c $(c > 1)$, temos $y = cf(x)$. O gráfico de $y = f(x)$ alonga verticalmente por um fator de c.

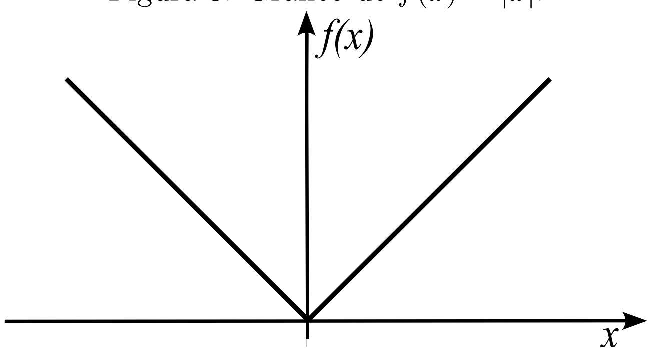
  - Se temos uma função $y = f(x)$ e multiplicamos $f(x)$ por uma constante *positiva* c $(0 < c < 1)$, temos $y = cf(x)$. O gráfico de $y = f(x)$ comprime verticalmente por um fator de $\frac{1}{c}$.

  - Se temos uma função $y = f(x)$ e multiplicamos x por uma constante *positiva* c $(c > 1)$, temos $y = f(cx)$. O gráfico de $y = f(x)$ comprime horizontalmente por um fator de c.

  - Se temos uma função $y = f(x)$ e multiplicamos x por uma constante *positiva* c $(0 < c < 1)$, temos $y = f(cx)$. O gráfico de $y = f(x)$ alonga horizontalmente por um fator de $\frac{1}{c}$.

Sabemos que o gráfico de $y = |x|$ é esboçado da seguinte forma:

Figura 3: Gráfico de $f(x) = |x|$.

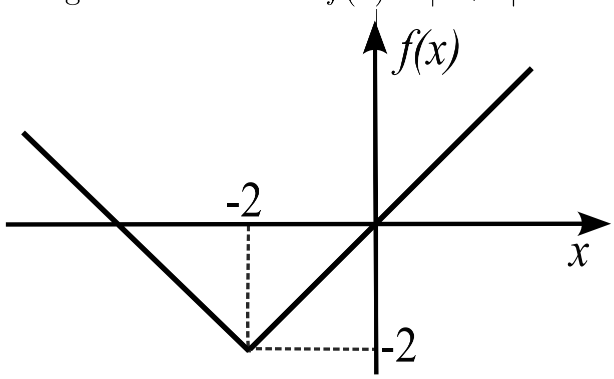


Assim, como fica o esboço do gráfico de $y = |x + 2| - 2$?

Como vimos no princípio da translação, se temos uma função $y = f(x)$ onde é somado uma contante c a x ($f(x+c)$), o gráfico da função é deslocado c unidades para a esquerda. E se subtrairmos uma constante c de $f(x)$ ($f(x) - c$), o gráfico da função é deslocado c unidades para baixo.

Logo, $y = |x + 2| - 2$ sofre um deslocamento de 2 unidades para a esquerda e 2 unidades para baixo. O gráfico, portanto, sofre um deslocamento de 2 unidades para a esquerda e 2 unidades para baixo:

Figura 4: Gráfico de $f(x) = |x + 2| - 2$.



Problema 9 (James Stewart. Cálculo. Vol.I, 7ª Ed, p. 47, Prob.24)
Os registros de temperatura T (em °) foram tomados de três em três horas a partir da meia-noite até às 15 horas em Montreal, em 13 de julho de 2004. O tempo foi medido em horas a partir da meia-noite.

t	0	3	6	9	12	15
T	21,5	19,8	20,0	22,2	24,8	25,8

(a) Use os registros para esboçar um gráfico de T como uma função de t.

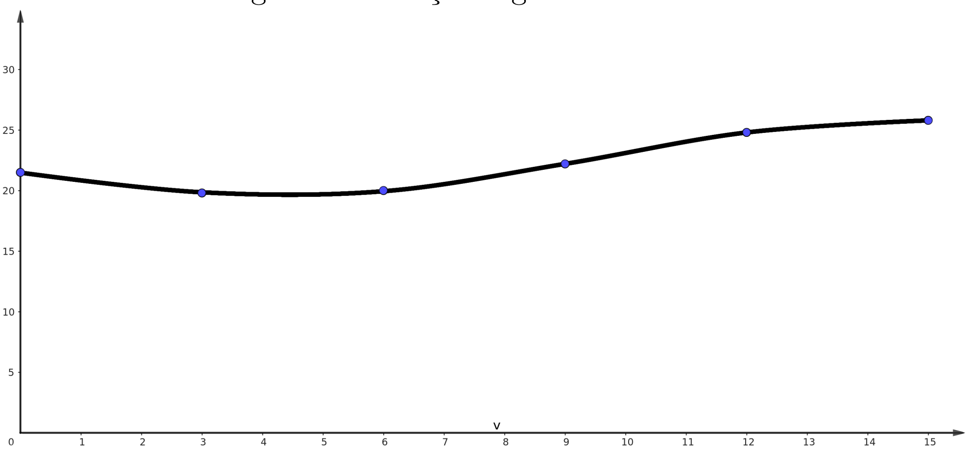
(b) Use seu gráfico para estimar a temperatura ás 11 horas da manhã.

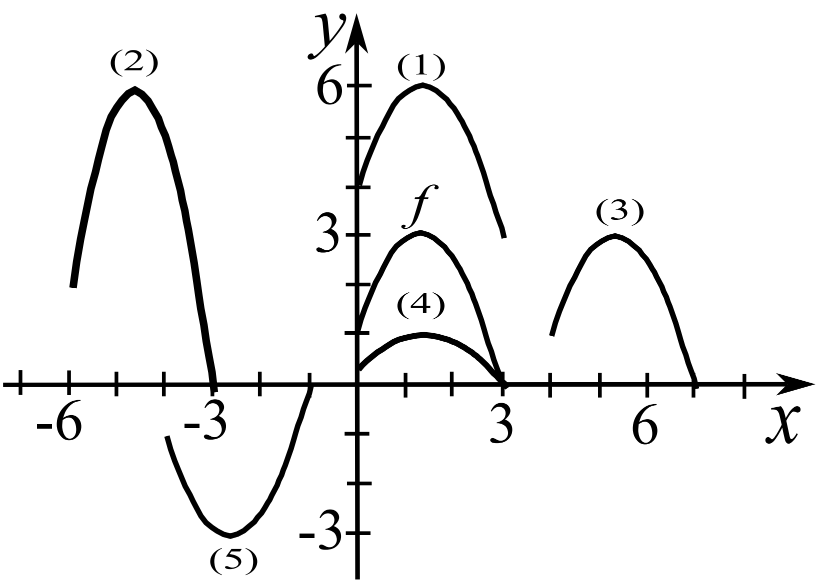
Resolução P9 (a) Primeiramente, foi feito um gráfico com os valores de T e t presentes na tabela. Para isso, os pontos na tabela foran ligados da forma mais suave possíve.

(b) Observando o gráfico, é perceptível que, quando $t = 11$, $T \approx 23°$ C.

Problema 10 (James Stewart. Cálculo. Vol.I, 7ª Ed, p.40, Prob.03)
Dado o gráfico de $y = f(x)$, associe cada equação com seu gráfico e justifique sua escolha.
(a) $y = f(x - 4)$.
(b) $y = f(x) + 3$.
(c) $1/3f(x)$.
(d) $-f(x - 4)$.

Figura 5: Esboço do gráfico de $T \times t$.





(e) $2f(x+6)$.

Resolução P10 Observemos o gráfico da função f. A função f tem domínio $Dom(f) = [0,3]$.

Observemos agora o gráfico (1). O domínio de tal função é $[0,3]$ e o comportamento desse gráfico assemelha-se ao comportamento do gráfico de f. Aparentemente, esse gráfico assemelha-se a translação do gráfico de f de 3 unidades positivas. Ou seja, para cada ordenada $f(a)$ cuja abcissa é a , houve a adição de 3 unidades a f, o que resulta na nova ordenada $f(a)+3$. A identificação correta é gráfico (1) com item (b).

Observemos agora o gráfico (4). O domínio de tal função é $[0,3]$, o comportamento desse gráfico assemelha-se de certa forma ao comportamento do gráfico de f. Verificamos que este gráfico tem uma amplitude menor que a do gráfico f. Este gráfico (4) não poderia ter sido obtido do gráfico f por uma translação. A imagem de $x = 3$ em $f(x)$ é igual a zero e a imagem de $x = 3$ no gráfico (4) também é igual a zero. Assim, podemos desconfiar que houve uma compressão do gráfico de f para que ele ficasse com o comportamento do gráfico (4). Uma multiplicação das ordenadas $f(a)$ por um número inferior a 1, faz com que os valores diferentes de zero diminuam e faz com que as raízes continuem sendo raízes. Desse modo a identificação correta é: gráfico (4) com item (c).

Observemos o gráfico (3). Percebe-se que esse gráfico tem as mesmas "alturas" que o gráfico de f, ou seja, o conjunto imagem de f é o mesmo conjunto imagem da função que tem o gráfico (3). Percebemos que a raiz de f, que era a abcissa $x = 3$, foi translada para uma nova raiz situada em $x = 7$. Percebemos que o domínio de f, que era $[0, 3]$, tornou-se um novo domínio igual a $[4, 7]$. Essas indicações de comportamento e translação do domínio de 4 unidades para a direita nos levam a associar o gráfico (3) com o item (a). A definição do item (a) é $y = f(x - 4)$, isso faz com que o gráfico dessa função seja obtido pela translação de 4 unidades para a direita a partir do gráfico de f.

Observemos o gráfico (2). O domínio da função que possui esse gráfico é $[-6, -3]$. Tem mesma medida do domínio de f. Percebemos que o comportamento dessa função é parecido com o comportamento da função original f, ou seja, inicia com a ordenada 2, é crescente até a ordenada 6 e depois decrescente e termina na ordenada zero. Então se multiplicarmos as imagens da função original f por 2, obteremos as imagens transladas da nova função associada ao gráfico (2). Devemos tomar o gráfico da função f, multiplicá-lo por um fator 2 e transladá-lo 6 unidades para a esquerda. Temos essa opção dentre as alternativas, é a opção (e) $y = 2f(x + 6)$. A associação correta é gráfico (2) com item (e). Observemos o gráfico (5).

Observamos que se transladarmos o gráfico de f quatro unidades para a esquerda, ou seja, considerarmos a função definida por $y = f(x + 4)$, obteremos um gráfico que será o simétrico do gráfico (5) em relação ao eixo xx. Para obter o gráfico (5) devemos realizar uma reflexão em torno do eixo de xx a partir do gráfico de $y = f(x + 4)$. Como tal reflexão é obtida alterando-se o sinal das imagens, o gráfico (5) é associado com a função de $y = -f(x + 4)$, que é a função da alternativa (d). A associação correta é gráfico (5) com item (d).